N° D'ORDRE : 6.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

PAR

Roger PERNET

1re THÈSE. — « Sur une extension du groupe conforme ».

2e THÈSE. — Proposition donnée par la Faculté.
Application de la théorie des nombres p-adiques à l'analyse diophantienne

Soutenues le 14 mars 1959 devant la Commission d'Examen

MM. PISOT *Président.*
CHATELET
THIRY } *Rapporteurs.*
CROISOT

N° D'ORDRE : 6.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

PAR

Roger PERNET

1re THÈSE. — « Sur une extension du groupe conforme ».

2e THÈSE. — Proposition donnée par la Faculté.
Application de la théorie des nombres p-adiques à l'analyse diophantienne

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Soutenues le 14 mars 1959 devant la Commission d'Examen

MM. PISOT *Président.*
CHATELET, THIRY, CROISOT } *Rapporteurs.*

UNIVERSITE DE BESANÇON
FACULTE DES SCIENCES

Doyen honoraire : M. GLANGEAUD

Professeurs honoraires : MM. BAILLAUD-JOANNIS-TOURNEUX
TRILLAT-VINCENSINI

Maître de conférences honoraire : M. GRANIER

Doyen :	M. JACQUEMAIN	L. H. -C. G. -O. I.	Chimie appliquée
Assesseur :	M. MESNAGE	O. I.	Chronométrie

Professeurs :

MM. CHATELET	O. A.	Calcul différentiel et intégral
CROISOT	P. A.	Méthodes Mathématiques de la Physique
DREYFUSS	O. A.	Géologie et Minéralogie
DUFFIEUX	L. H. -O. I. -M. A.	Physique
JULLIEN	O. L. H. -C. G. -M. M. -O. I.	Zoologie
PERROT	O. I.	Chimie générale
QUANTIN	O. A.	Botanique
THEOBALD	L. H. -O. A.	Géologie
THIRY	P. A.	Mécanique
TRONCHET	O. I.	Botanique

Chargé d'Enseignement :

DELHAYE	Astronomie

Maîtres de conférences :

BERNARD	Chimie-physique
CAIRE	Géologie
CHALEAT	Chronométrie
CHAMPIER	Physique
Mlle DU MARACHE	Physique
PHAM-MAU-QUAN	Mathématiques
RIGAL	Mathématiques
RIPPLINGER	Zoologie
UEBERSFELD	Physique

Secrétaire : ROUQUAIROL

SUR UNE EXTENSION DU GROUPE CONFORME

INTRODUCTION

Le présent mémoire a pour but d'étendre le groupe conforme de l'espace à 3 dimensions par l'adjonction d'une famille à un paramètre de transformations ponctuelles et d'indiquer quelques applications de ce nouveau point de vue.

Dans trois chapitres préliminaires, on expose des faits plus ou moins classiques de la théorie des cyclides de Dupin et congruences paratactiques sous une forme intrinsèque mieux adaptée au but poursuivi et souvent assez différente des méthodes traditionnelles (on consultera en fin d'article les travaux antérieurs sur le même sujet).

Au chapitre I, on étudie les transpositions anallagmatiques échangeant deux cercles donnés de l'espace, invariants dans une inversion réelle (S). La théorie des congruences paratactiques de cercles (ou famille de ∞^2 cercles, incidents à deux isotropes de paramètres conjugués de la sphère S) en découle comme cas singulier et on retrouve de façon opérationnelle les propriétés classiques des cyclides de Dupin.

Le chapitre II est une application à la géométrie des séries de Villarceau d'une même congruences paratactique. Les principaux résultats en ont été signalés dans une note aux C. R. A. S. du 19 Novembre 1945. On observe déjà une structure cayleyenne.

La raison en est fournie au chapitre III, par la représentation sphérique d'une congruence paratactique : la notion de distance paratactique de deux cercles congruents s'interprète, après transfert, comme distance cayleyenne ; on étudie aussi une représentation équivalente sur un plan complexe. Dans les deux cas la représentation est conforme : deux séries de la congruence se coupent sous l'angle des cercles images. Toutefois l'étude du chapitre II correspond à une réalisation plus riche de cette géométrie cayleyenne.

Les trois chapitres suivants traitent de résultats nouveaux résumés dans deux notes aux C. R. A. S. de 1951 (Tome 233 p. 1 340 et 1 419).

Au chapitre IV, on utilise la représentation de l'extension complexe de la sphère S sur un produit direct $\pi \times \pi'$ de deux plans de Cauchy, pour analyser les transformations anallagmatiques classiques permutables à (S) : elles induisent sur $\pi \times \pi'$ des paires de transformations anallagmatiques planes dont on effectue le recensement.

Au chapitre V, on définit un groupe obtenu en combinant les transformations du groupe conforme avec celles d'un groupe à un paramètre de "quasi-homothéties" dont chacune est le produit de deux "quasi-inversions". Une quasi-inversion est une transformation ponctuelle de l'espace définie par l'intermédiaire de deux transformations opérant respectivement sur les cercles de l'une ou l'autre de deux congruences d'espèces différentes. L'image sur $\pi \times \pi'$ d'une quasi-inversion est une paire d'inversions ne conservant pas l'absolu commun de ces deux plans, mais homologues l'une de l'autre dans un déplacement cayleyen.

Au chapitre VI, on indique diverses applications du groupe ainsi étendu.

1/ Transformations d'un couple de cercles cosphériques (ou paratactiques) en un autre d'angle (ou de distance paratactique) différent.

2/ Extension du groupe homographique ponctuel.

3/ Etude d'une variété hermitienne du 6ème degré à 7 dimensions.

CHAPITRE I

OPÉRATIONS ANALLAGMATIQUES REMARQUABLES CYCLIDES DE DUPIN

I - NOTATIONS -

Les éléments géométriques considérés dans le mémoire seront toujours définis par des relations à coefficients réels entre les coordonnées du point générique qui, elles, pourront prendre des valeurs complexes.

L'espace E considéré est à 3 dimensions.

Les symboles logiques $\cup$ et $\cap$ seront utilisés pour désigner :

- soit la sphère S contenant 2 cercles cosphériques C et C'

ex. : $S = C \cup C'$

- soit le cercle d'intersection C, autre que l'ombilicale, de 2 sphères S et S'.

ex. : $C = S \cap S'$

En dehors de ces cas, ils conserveront leurs significations usuelles.

L'un des cercles (resp. l'une des sphères) peut être réduit à une droite (resp. à un plan).

Le signe x désignera un produit direct de 2 espaces, c'est-à-dire l'espace des paires de points génériques de ces espaces.

(S) (resp. (P)) désignera une inversion de sphère directrice S (resp. une symétrie par rapport au plan P).

(C) est une transposition anallagmatique par rapport au cercle C c'est-à-dire le produit commutatif de 2 inversions (S) et (S') telles que :

$$S \cap S' = C \quad \text{et} \quad S \perp S'$$

On écrira aussi : $(S \cap S')$ pour la désigner. Abréviation : T.A.

(C_θ) est une rotation anallagmatique d'angle θ, c'est-à-dire le produit

de (S) et (S') telles que : $S \cap S' = C$ et angle $(S,S') = \frac{\theta}{2}$. On la notera aussi : $(S \cap S')_\theta$. Abréviation R.A.

Une telle opération se nomme aussi anarotation et la T.A. particulière relative au cas $\theta = \pi$, anasymétrie, tandis que par abus de langage, le cercle support, est dit un anasymètre.

Les R.A. admettent une infinité à un paramètre de décompositions équivalentes en un produit de 2 inversions.

Le symbole $\perp$ appliqué à 2 cercles signifiera : cosphériques et orthogonaux.

Les isotropes considérées ne sont pas tangentes à l'ombilicale.

II - TRANSPOSITIONS CONSERVANT UN CERCLE DONNE -

Un cercle C est invariant par une T.A. (C') telle que $C \neq C'$ dans 2 cas seulement :

1/ $C \perp C'$

2/ C et C' forment un anneau orthogonal : on dit encore qu'ils sont conjugués. Chacun d'eux contient alors les 2 sphères points passant par l'autre ou foyers. Un conjugué de C se note $\bar{C}$. Les $\bar{C}$ forment un ensemble à 2 paramètres. Il est immédiat que tout cercle cosphérique à C et $\bar{C}$ est $\perp$ à C et $\perp$ à $\bar{C}$. Les cercles $\perp$ communs à 2 cercles conjugués forment un ensemble à 2 paramètres.

III - SPHERES ORTHOGONALES A 2 CERCLES -

Pour qu'une sphère soit $\perp$ à un cercle, il faut et suffit qu'elle contienne les foyers du cercle, c'est-à-dire les points limites du faisceau des sphères contenant le cercle. Soient deux cercles :

1/ d'axes non coplanaires ; il existe une sphère unique $\perp$ aux 2 cercles

2/ d'axes coplanaires ;

a) si les foyers ne sont pas concycliques, c'est-à-dire si les cercles ne sont pas cosphériques, le plan de symétrie commun est la seule sphère (dégénérée) $\perp$ aux 2 cercles.

b) si les cercles sont cosphériques, il existe une infinité de sphères orthogonales formant un faisceau dont les points limites sont les points communs aux 2 cercles.

Ainsi, excepté le cas b), il existe toujours, à une inversion près, une sphère et une seule $\perp$ à 2 cercles donnés. On sait qu'un des diamètres de cette sphère à pour extrémités le couple conjugué aux points communs à chaque cercle et à la droite d'intersection de leurs plans.

IV - TRANSPOSITIONS CONSERVANT SEPAREMENT DEUX CERCLES DONNES -

De ce qui précède, il résulte qu'à priori, les T.A. (C') laissant invariants C_1 et C_2 peuvent être de 3 sortes, selon que :

1/ C' est simultanément un $\bar{C}_1$ et un $\bar{C}_2$

2/ C' est $\perp$ à C_2 et est un $\bar{C}_1$

3/ C' est $\perp$ à C_1 et $\perp$ à C_2

Etude du 1/

Le plan P de C' contient les axes des 2 cercles, donc est un plan de symétrie commun. Soit S une sphère telle que $C' \subset S$ et $S \perp P$.

On a : $(C') = (P \cap S) = (P)(S)$.

C_1 et C_2 séparément invariants par (P) et (C') le sont aussi par (S). Donc C_1 et C_2 sont cosphériques (ou coplanaires). Ainsi le 1/ exige que C_1 et C_2 soient cosphériques et C' est alors le cercle de foyers $C_1 \cap C_2$.

Etude du 2/

C' contient les foyers de C_1 : il faut et suffit pour cela que C' et C_2 appartiennent à une même sphère $\perp$ à C_1. On est ramené à mener par 2 points d'une sphère un cercle $\perp$ à un cercle donné de cette sphère.

Donc, si par C_1 passe une sphère $\perp$ à C_2 et une seule, (ce qui entraîne la réciproque) le problème admet une solution.

Si $C_1 = \bar{C}_2$, il existe une infinité de sphères contenant C_1 et les foyers de C_2. D'où un faisceau sphérique de cercles C' ayant pour points de base les foyers de C_2. Leur lieu est la sphère $\perp$ aux 2 cercles conjugués.

Etude du 3/

Si C_1 et C_2 sont cosphériques, les C' cherchés sont les cercles du faisceau conjugué du faisceau sphérique à points de base $C_1 \cap C_2$. Ecartons ce cas.

C_1 et C_2 admettent alors une seule sphère orthogonale commune S (pouvant se réduire à un point si C_1 et C_2 ont un point commun). A une inversion près, on peut supposer cette sphère non dégénérée en un plan. Alors toute (C') laissant C_1 et C_2 invariants conserve S. Or il n'existe qu'un $\bar{C}_1 \perp$ à S ; donc (C'), conservant C_1 et S, laisse aussi $\bar{C}_1$ invariant. Même raisonnement pour $\bar{C}_2$. C' est nécessairement cosphérique à $\bar{C}_1$, sinon il devrait lui être conjugué et serait confondu avec C_1. Même raisonnement pour $\bar{C}_2$.

C' cosphérique à C_1 $\bar{C}_1$ C_2 $\bar{C}_2$ a un axe D' rencontrant les axes D_1 $\bar{D}_1$ D_2 $\bar{D}_2$ des cercles précédents.

Réciproquement, soit D' une droite rencontrant D_1 $\bar{D}_1$ D_2 $\bar{D}_2$: C' $\perp$ S' d'axe D' est cosphérique à C_1 $\bar{C}_1$ C_2 $\bar{C}_2$. Mais C' cosphérique à C_1 et $\bar{C}_1$ est $\perp$ à chacun d'eux , cosphérique à C_2 et $\bar{C}_2$ est $\perp$ à chacun d'eux.

Donc : $C' \perp C_1$ et $C' \perp C_2$

Ainsi, nous montrons qu'il existe autant de cercles $\perp$ à C_1 et C_2 que de droites rencontrant les axes D_1 $\bar{D}_1$ D_2 $\bar{D}_2$ de ces cercles. Mais, D_1 et $\bar{D}_1$ d'une part, D_2 et $\bar{D}_2$ de l'autre s'échangent dans la polarité de sphère S et réciproquement, 2 droites qui s'échangent dans cette polarité sont les axes de 2 cercles conjugués invariants par S.

Dans le cas général, il n'existe que 2 droites rencontrant 4 droites données et comme l'ensemble D_1, $\bar{D}_1$, D_2, $\bar{D}_2$ est invariant dans la polarité définie par S, ces 2 droites s'échangent dans la polarité. Donc, si le quadruple D_1 $\bar{D}_1$ D_2 $\bar{D}_2$ n'est pas hyperboloïdique, il existe 2 cercles conjugués $\perp$ communs à C_1 et C_2 et $\perp$ à S.

Examinons dans quel cas le quadruple est hyperboloïdique.

V - QUADRIQUES AUTOPOLAIRES -

S'il en est ainsi, la semi-quadrique engendrée par les droites D' rencontrant D_1 $\bar{D}_1$ D_2 $\bar{D}_2$ est invariante dans une polarité.

Par un point M de la biquadratique d'intersection de S et Q passent alors 2 génératrices D et D', ayant pour transformées dans la polarité 2 génératrices situées dans le plan tangent en M à S, dont l'une au moins passe par M et coïncide par suite avec D ou D'. Donc, l'une au moins de D ou D' est dans le plan tangent à S.

2 cas sont possibles :

a) Quel que soit $M \in S \cap Q$, D et D' s'échangent dans la polarité.

Q est circonscrite à S, donc de révolution.

En tout point du cercle de contact passent 2 génératrices $\perp$ de Q et réciproques : ce cas ne saurait se présenter dans notre étude, car D_1 et $\bar{D}_1$ étant coplanaires ainsi que D_2 et $\bar{D}_2$, C_1 et C_2 seraient réduits à des points, puisque leurs axes devraient être tangents à S.

b) Si D demeure invariante dans la polarité, elle appartient à S et l'intersection résiduelle ne pouvant être courbe de contact d'après a) se compose de 3 isotropes distinctes.

Ainsi, une condition nécessaire est que $S \cap Q$ se compose de 4 isotropes distinctes (2 de chaque système).

Supposons d'abord que Q soit une quadrique à centre ; il existe dans le cas général 8 génératrices isotropes : 4 de chaque système se coupant en 16 points, dont 12 à distance finie qui sont les ombilics.

Ces 12 points se répartissent 4 à 4 sur les sections principales, symétriquement par rapport au centre ou aux axes. Par 4 de ces isotropes formant un quadrilatère gauche, dont les sommets sont à distance finie, passe une sphère. Il existe 6 telles sphères centrées sur les axes, 2 à 2 symétriques par rapport au centre (2 seulement peuvent être réelles). Soit O le centre d'une telle sphère S, ω le centre de la quadrique Q, AA' l'axe passant par O, D_0 et $\bar{D}_0$ des génératrices de même système passant par A et A' respectivement : D_0 et $\bar{D}_0$ s'échangent dans la polarité définie par S. Donc les génératrices du cône asymptote situées dans le plan principal $\perp$ à AA' sont $\perp$.

Réciproquement, soit Q une quadrique dont l'un des angles principaux du cône asymptote est droit. Soit O le centre de l'une S des 2 sphères centrées sur l'axe $\perp$ au plan principal qui contient l'angle droit.

Dans la polarité S, le faisceau ponctuel des quadriques contenant les 4 droites isotropes $S \cap Q$ se transforme en le faisceau tangentiel des quadriques contenant les mêmes droites. Q est la quadrique du faisceau ponctuel passant par le point à l'infini sur Δ_0 : elle se transforme en la quadrique du faisceau tangentiel, tangente au plan O, Δ_0, qui n'est autre que Q. Ainsi, Q est invariante dans la polarité S.

Si Q est un P. H. , Q ne contient que 4 génératrices isotropes formant un quadrilatère gauche, donc déterminant une seule sphère S ; la théorie est la même : ω est rejeté à l'infini et le centre de S confondu avec le sommet du P. H. On montre qu'il faut et suffit que le P. H. soit équilatère.

En définitive, les quadriques autopolaires dont il est question ici sont des P. H. E. ou des quadriques à centre dont le cône asymptote a un angle principal droit. Le centre d'une sphère définissant la polarité est le sommet du P. H. E. ou l'un des 2 points de rencontre des normales à la quadrique en des ombilics, points situés sur l'axe $\perp$ au plan principal contenant 2 génératrices du cône asymptote.

VI - PARATAXIE -

Revenant aux cercles C_1, C_2, on voit que la c. n. s. pour qu'ils aient une infinité de cercles $\perp$ communs est que les 4 droites D_1 $\bar{D}_1$ D_2 $\bar{D}_2$ appartiennent à une même semi-quadrique autopolaire Q. On dit alors que C_1 et C_2 sont paratactiques : leurs cercles $\perp$ communs C' sont 2 à 2 conjugués et invariants par (S) : le lieu Γ' des C' est une série droite de Villarceau (en abrégé V. S. D.) et le lieu des axes des C' est la semi-quadrique Q' complémentaire de Q (c'est-à-dire déterminant avec Q une même quadrique).

Il est clair que 2 C' quelconques non conjugués sont paratactiques, puisqu'ils admettent pour cercles $\perp$ communs tous les cercles $\perp$ à S admettant pour axes les génératrices de Q et dont le lieu est la V. S. D. Γ complémentaire de Γ' sur la cyclide de Dupin $\mathcal{C}$ qui les contient toutes deux. 2 cercles paratactiques réels sont évidemment enlacés (S est alors semi-réelle).

La parataxie de 2 cercles est évidemment anallagmatique.

Si l'un des cercles, C_2 par exemple, est remplacé par une droite D_2, Q est un P. H. E. et d désignant la distance du centre de C_1 à D_2, R le rayon de C_1, V l'angle de D_2 avec le plan de C_1, la c. n. s. de parataxie de C_1 et D est :

$$d = R \cos V$$

2 cercles $C \in \Gamma$ et $C' \in \Gamma'$ sont sur une même sphère centrée sur la quadrique $Q \cup Q'$, au point de concours des axes de C et C', bitangente à $\mathcal{C}$ en 2 points $C \cap C'$ homologues par (S).

De l'étude précédente, résulte que les plans de C et C' enveloppent le cône de sommet O circonscrit à $Q \cup Q'$. Ces plans contiennent chacun 2 cercles de familles différentes et sont bitangentes à $\mathcal{C}$ en 2 points homologues par (S).

Les cercles de Γ' déterminent donc sur C_1 et C_2 des divisions portées par deux faisceaux homographiques de sommet O.

VII - ETUDE DES CYCLIDES DE DUPIN -

Dans ce §, Q° désignera plus généralement une quadrique non nécessairement autopolaire ayant en commun avec une sphère S 4 génératrices isotropes formant un quadrilatère gauche X Y $\bar{X}$ $\bar{Y}$.

Les cercles C et C' dont les axes engendrent les 2 semi-quadriques Q et Q' portées par Q° forment 2 familles telles que 2 cercles de familles différentes soient sur une même sphère bitangente. Soit $\mathcal{C}$ la cyclide de Dupin contenant les 2 familles précédentes appelées "séries obliques de Villarceau" (en abrégé V. S. O. pour une V-série oblique).

L'axe d'un cercle C_1 d'une famille rencontre S aux foyers a_1 et b_1 de C_1 situés sur 2 isotropes de même système de S : XY et $\bar{X}\bar{Y}$. Or, dans la polarité S, $a_1 b_1$ se transforme en $a'_1 b'_1$, droite contenant les points a'_1 et b'_1 de $C_1 \cap S$, situés également sur XY et $\bar{X}\bar{Y}$ invariantes dans la transformation.

2 cercles cosphériques C_1 C'_1 ont des axes coplanaires $a_1 b_1$ et $c_1 d_1$; il en est de même des droites réciproques $a'_1 b'_1$ et $c'_1 d'_1$ (c_1 et d_1, c'_1 et d'_1 sont sur $X\bar{Y}$ et $Y\bar{X}$). Donc $a'_1 c'_1$ et $b'_1 d'_1$ se coupent en un point I de $X\bar{X}$.

Dans l'inversion (I) dont la sphère directrice a pour centre I et contient le cercle U de foyers X et $\bar{X}$ (passant donc par Y et $\bar{Y}$), XY s'échange avec $\bar{X}\bar{Y}$ et $X\bar{Y}$ avec $Y\bar{X}$. Donc a'_1 et c'_1, b'_1 et d'_1 sont inverses dans (I) et C_1 est homologue de C'_1

Ainsi tout cercle C ou C' de $\mathcal{C}$ se transforme en un cercle de famille différente par une inversion dont la sphère directrice contient l'un ou l'autre ses 2 cercles conjugués U et $\bar{U}$ de foyers X, $\bar{X}$ et Y, $\bar{Y}$. $\mathcal{C}$ reste donc invariante dans une telle inversion ou plus généralement dans le produit d'un nombre quelconque de telles inversions.

En particulier, $\mathcal{C}$ est invariante dans une R.A. (U_θ) ou $(\bar{U}_\theta)$: on dit que $\mathcal{C}$ admet 2 anaxes conjugués.

(S) qui conserve U et $\bar{U}$ est dite l'inversion principale de $\mathcal{C}$ (le quadrilatère X $\bar{X}$ Y $\bar{Y}$ appartient à $\mathcal{C}$).

Puisque d'un $C_1 \subset \mathcal{C}$ on déduit tous les autres cercles de la série complémentaire par des inversions dont les sphères directrices sont les sphères du faisceau à cercle de base U, la section de $\mathcal{C}$ par un plan P contenant X $\bar{X}$ est le lieu des homologues des points $P \cap C_1$ dans de telles inversions. Comme C_1 n'est invariant dans aucune des inversions précédentes, ces 2 points d'intersection ne sont homologues dans aucune de ces inversions. Aussi le lieu se compose de 2 cercles contenant X et Y, car le lieu des inverses d'un point dans les inversions, dont les sphères directrices forment un faisceau, est un cercle.

Toutefois, si P est le plan X Y $\bar{X}$, l'un des points $(P \cap C)$ est sur XY et le lieu se compose de XY, Y$\bar{X}$ et du cercle lieu des inverses de l'autre point.

Même raisonnement pour un plan contenant Y$\bar{Y}$.

On a ainsi mis en évidence 2 nouvelles familles de cercles σ et σ' contenant respectivement X et $\bar{X}$, Y et $\bar{Y}$. 2 cercles σ et σ' ne peuvent être cosphériques puisque leurs foyers ne sont pas coplanaires et comme un σ doit rencontrer le plan d'un σ' en 2 points situés nécessairement sur σ' ou σ'', cercles constituant l'intersection complète par le plan considéré, on voit que σ rencontre chacun des cercles σ' ou σ'' en un point. Ainsi chaque cercle σ rencontre en un point un σ' quelconque.

Soient alors 2 points M et M' non situés sur les isotropes de $\mathcal{C}$, σ et σ' des cercles de familles différentes ayant m commun. Une inversion de sphère directrice centrée en I (=mM $\cap$ X$\bar{X}$) et contenant U transforme M en m. De même, une inversion de sphère directrice centrée en I' (=mM' $\cap$ Y$\bar{Y}$) transforme m en M'. (I)(I') est une T.A. puisque les 2 sphères précédentes sont $\perp$ et cette T.A. conserve $\mathcal{C}$ tout en permutant M et M'.

Comme l'ensemble des 4 isotropes XY, X$\bar{Y}$, Y$\bar{X}$, Y$\bar{Y}$ est bien déterminé, dès qu'on donne U et $\bar{U}$ et conservé dans toute inversion dont la sphère directrice contient l'un ou l'autre de ces 2 cercles, on voit que $\mathcal{C}$ est bien déterminé par ses 2 anaxes conjugués et un point non situé sur les isotropes.

Un cercle σ est obtenu par R.A. continue d'un point relativement à un anaxe (σ est alors conjugué à cet anaxe). Puis une R.A. continue de σ autour de l'autre anaxe engendre $\mathcal{C}$.

De plus, toute propriété anallagmatique relative à un point de $\mathcal{C}$ non situé sur les isotropes s'étend à tous les autres points analogues. En particulier :

1/ Par tout point de $\mathcal{C}$ non situé sur les isotropes passent 4 cercles : 2 de Villarceau et 2 cercles σ et σ' : les tangentes à σ et σ' sont bissectrices de l'angle formé par les tangentes aux 2 autres, qui est l'angle de Villarceau ou V-angle de $\mathcal{C}$; il suffit pour le démontrer de le constater pour l'un des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite joignant le centre ω de Q au centre ω de S : le V-angle est celui des génératrices du cône asymptote à la quadrique Q, lieu des axes des cercles de $\mathcal{C}$, situées dans le plan $\perp$ à Oω.

2/ Les σ et σ' sont des familles de cercles de contact avec $\mathcal{C}$ de 2 familles de sphères à un paramètre : chaque sphère de l'une des familles est tangente à toute sphère de l'autre. Les déférentes des sphères de chaque famille sont des coniques homofocales.

3/ En combinant le mode de génération de $\mathcal{C}$ et le théorème sur la transmutation d'un produit d'inversions, on déduit que l'inverse d'une cyclide de Dupin est une cyclide de Dupin de même V-angle.

On a vu que le V-angle de la cyclide introduite dans l'étude des cercles $\perp$ à 2 cercles paratactiques est droit. Une telle cyclide est équilatère et porte 2 séries droites de Villarceau (notées V. S. D.). Une étude ultérieure justifiera cette dénomination. Les 2 V-familles d'une cyclide quelconque de Dupin sont dites séries obliques de Villarceau (V. S. O.).

VIII - CONDITION CARACTERISTIQUE DE PARATAXIE POUR 2 CERCLES -

2 cercles paratactiques C_1 et C_2 appartiennent à une même cyclide équilatère de Dupin ; donc une condition nécessaire de parataxie est qu'ils rencontrent chacun 2 isotropes non coplanaires conjuguées, joignant chacune un foyer de l'un à un foyer de l'autre.

Inversement, soient C_1 et C_2 2 cercles rencontrant 2 isotropes XY et $\bar{X}\bar{Y}$ en a_1 et b_1, a_2 et b_2, admettant pour foyers des points a'_1 et b'_1, a'_2 et b'_2 situés sur ces droites. La sphère S contenant XY et $\bar{X}\bar{Y}$ est $\perp$ à C_1 et C_2. La quadrique Q déterminée par le triplet a_1b_1, $a'_1b'_1$, a_2b_2 coupe S selon XY, $\bar{X}\bar{Y}$ et 2 autres isotropes de systèmes différents $X\bar{X}$ et $Y\bar{Y}$. Q peut être définie à l'aide du triplet a_1b_1, $a'_1b'_1$, $X\bar{X}$; elle est donc invariante dans la polarité S, car a_1b_1 et $a'_1b'_1$ sont homologues dans cette polarité, $X\bar{X}$ demeurant invariable. Elle contient donc aussi $a'_2b'_2$ réciproque de a_2b_2. Les 4 droites a_1b_1, $a'_1b'_1$, a_2b_2, $a'_2b'_2$ sont donc 4 génératrices d'une même semi-quadrique autopolaire. Donc C_1 et C_2 sont paratactiques (ou plus particulièrement conjugués si a_1b_1 et $a'_1b'_1$ d'une part, a_2b_2 et $a'_2b'_2$ de l'autre sont confondus).

En résumé, pour que 2 cercles soient paratactiques, il faut et suffit qu'ils rencontrent 2 mêmes isotropes couplées non coplanaires, ou encore que leurs foyers soient sur 2 telles droites isotropes (on peut aussi dire que chaque cercle est bitangent à l'ensemble des 2 cônes isotropes contenant l'autre).

De ce qui précède résulte que chaque anaxe d'une cyclide est paratactique à tous les V-cercles de la surface et que 2 cercles d'une même V-série le sont aussi.

Avec les notations précédentes, soient XY et $\bar{X}\bar{Y}$ les isotropes contenant les foyers a'_1 et b'_1, a'_2 et b'_2 de 2 cercles paratactiques C_1 et C_2 : les points de rencontre des 2 cercles avec XY et $\bar{X}\bar{Y}$ sont a_1 et b_1, a_2 et b_2 tels que a_1b_1, $a'_1b'_1$ d'une part, a_2b_2, $a'_2b'_2$ de l'autre soient conjuguées par rapport à la sphère S contenant XY et $\bar{X}\bar{Y}$. Le quadruple a_1b_1, $a'_1b'_1$, a_2b_2, $a'_2b'_2$ définit une semi-quadrique, autopolaire par rapport à S, lieu des axes d'une V. S. D. contenant C_1 et C_2.

Ainsi par 2 cercles paratactiques non conjugués passent une V. S. D. et une infinité de V. S. O. : toutes celles correspondant aux semi-quadriques du faisceau déterminé par les droites $a'_1b'_1$, $a'_2b'_2$, XY, $\bar{X}\bar{Y}$.

Si $C_1 = \bar{C}_2$, $a'_1b'_1$ et $a'_2b'_2$ sont réciproques dans la polarité et toutes les semi-quadriques précédentes sont autopolaires. Par suite, les V-séries correspondantes sont toutes droites.

IX - TRANSPOSITIONS ECHANGEANT 2 CERCLES C_1 ET C_2 (non cosphériques)-

A - C_1 et C_2 non paratactiques.

Soient C' et $\bar{C}'$ leurs deux cercles $\perp$ communs conjugués, (G) une T. A. (si elle existe) échangeant C_1 et C_2. Tout cercle $\perp$ à C_1 et G l'est aussi à C_2. D'où : G $\perp$ à C' et $\perp$ à $\bar{C}'$.

(G) échange les sphères $C_1 \cup C'$ et $C_2 \cup C'$; il appartient donc à l'une des sphères bissectrices Σ_i de ces 2 sphères ($i = 1, 2$ et $\Sigma_1 \perp \Sigma_2$). Même raisonnement pour les sphères $C_1 \cup C'$ et $C_2 \cup C'$. G se trouve sur l'une ou l'autre des sphères bissectrices Σ'_j ($j = 1, 2$ $\Sigma'_1 \perp \Sigma'_2$).

Les sphères Σ_i Σ'_j sont 2 à 2 orthogonales.

Réciproquement, il est immédiat que tout $G_{ij} = \Sigma_i \cap \Sigma'_j$ est un anasymètre. En définitive, il existe 4 T. A. répondant à la question (G_1) (G_2) (G_3) (G_4) telles que G_1G_2, G_2G_3, G_3G_4, G_4G_1 soient des couples de cercles $\perp$ se coupant sur C' et $\bar{C}'$, les couples G_1G_3 et G_2G_4 étant formés de cercles conjugués.

B - C_1 et C_2 paratactiques et non conjugués.

Il existe alors une infinité de couples C' $\bar{C}'$ formant une V. S. D. Γ'. A partir d'un tel couple, on peut construire 4 anasymètres ainsi qu'au (A). Si G_1 et G_2 désignent 2 anasymètres cosphériques, $\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$ sont les 2 autres.

Supposons $G_1 \subset \Gamma'$: (G_1) laisse invariant l'ensemble C_1 C_2 donc Γ'. Soit Γ la V-série complémentaire de Γ'. Le cercle de Γ qui contient $G_1 \cap C'$ est invariable par (G_1) : ce cercle $\perp$ à C' et cosphérique à $\bar{C}'$ n'est autre que G_2.

Même raisonnement pour $\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$.

Ainsi 2 des 4 anasymètres précédents sont des cercles conjugués de Γ ; nous les désignerons désormais par C et $\bar{C}$.

Soit $C' \subset \Gamma'$; (C') (C) est une T. A. (G) échangeant C_1 et C_2. Quand C' décrit Γ', G décrit la V. S. D. Ω' déduite de Γ' par l'une ou l'autre de 2 R. A. d'angle $\frac{\pi}{2}$ relatives à C et $\bar{C}$.

Il n'existe pas d'autres anasymètres que C, $\bar{C}$ et les cercles de Ω' ; en effet, tout anasymètre devant laisser Γ' invariant est un cercle de Γ ou un cercle $\perp$ à Γ et Γ', donc est $\perp$ à C' de Γ' qu'il rencontre. Donc, en reprenant la démonstration du (A), on voit qu'à tout cercle C' sont associés seulement 4 anasymètres, soit, dans le cas actuel C $\bar{C}$ et les 2 cercles conjugués de Ω qui sont $\perp$ à C'. Remarquons qu'une R. A. du cercle C_1 par rapport à C donne un cercle paratactique à C_1. Donc, tous les cercles de Ω série complémentaire de Ω' sont paratactiques à C_1 et C_2.

En résumé, il existe 2 anasymètres conjugués paratactiques à C_1 et C_2 ainsi qu'une infinité d'anasymètres non paratactiques à C_1 et C_2 formant la série droite Ω'.

C - C_1 et C_2 conjugués.

Par C_1 et C_2 passent une infinité de V. S. D. (d'ailleurs toutes orthogonales aux séries d'anaxes C_1 et C_2).

Soient C et $\bar{C}$ 2 anasymètres paratactiques à C_1 et C_2 appartenant à une V. S. D. contenant C_1 et C_2 (voir B). Une R. A. continue dont le cercle de base est C_1 transforme C en un cercle quelconque de la série Γ d'anaxes C_1 et C_2 engendrée par C. Mais une telle série étant invariante par (C), la cyclide qui la contient doit l'être aussi. Donc Γ' complémentaire de Γ est engendrée par des cercles $\perp$ à C et la cyclide est équilatère.

Or, il n'existe qu'une cyclide équilatère d'anaxes C_1 et C_2.

Donc les anasymètres cherchés sont les cercles des 2 V-séries de la cyclide de Dupin admettant C_1 et C_2 pour anaxes.

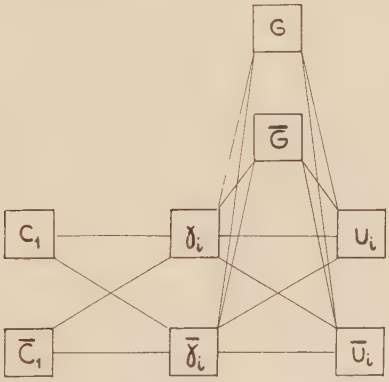
X - ROTATIONS ANALLAGMATIQUES TRANSFORMANT UN CERCLE C_1 EN UN CERCLE (C_1 et C_2 non cosphériques).

A - C_1 et C_2 non paratactiques.

Soit $(U_i)_\theta$ une telle R.A. (si elle existe) admettant U_1 pour cercle de base ; il est clair que la donnée de U_i la détermine de manière unique ; elle peut se décomposer en un produit de 2 T.A. : la première, relative à l'un γ_i des cercles $\perp$ à U_1 et C_1, laissant C_1 invariant, la deuxième relative à un anasymètre G de C_1 et C_2.

Puisque nous raisonnons sur des cercles tous $\perp$ à S (sphère $\perp$ à C_1 et C_2), tout cercle $\perp$ à un autre l'est aussi à son conjugué.

D'où le schéma suivant où les liaisons expriment l'orthogonalité :



Convenons de désigner les axes des cercles précédents par les mêmes lettres, accentuées. Remarquant que 2 cercles cosphériques et orthogonaux à une même sphère ont des axes coplanaires, on peut construire un schéma isomorphe au précédent, où les lettres sont accentuées, les liaisons exprimant alors la coplanarité. Les axes de 2 cercles conjugués sont des droites réciproques dans la polarité S.

D'où résulte que γ'_i engendre une semi-quadrique admettant pour supports les droites C'_1 $\bar{C}'_1$ G' $\bar{G}'$. Cette semi-quadrique est aussi le lieu de $\bar{\gamma}'_i$ et elle est invariante dans la polarité S. Donc γ_i engendre une V.S.D. (qui est aussi le lieu de $\bar{\gamma}_i$). Mais U'_i joint les points $G' \cap \gamma'_i$ et $\bar{G}' \cap \bar{\gamma}'_i$ qui décrivent des divisions homographiques sur G' et $\bar{G}'$, donc U'_i engendre une semi-quadrique qui est aussi le lieu de $\bar{U}'_i$ puisque les points $G' \cap \bar{\gamma}'_i$ et $\bar{G}' \cap \gamma'_i$ sont homologues dans l'homographie précédente. Donc U'_i décrit une semi-quadrique autopolaire et U_i engendre une V.S.D. qui est aussi le lieu de $\bar{U}_i$. Cette série contient en particulier les 2 anasymètres de C_1 et C_2 autres que G et $\bar{G}$. En répétant pour ces 2 cercles le même raisonnement, on voit que :

Le lieu des cercles de base des R.A. transformant C_1 en C_2 se compose de 2 V.S.D. constituant la cyclide équilatère de Dupin contenant les 4 anasymètres (correspondant aux 4 R.A. singulières d'angle π).

B - C_1 et C_2 paratactiques et non conjugués.

On peut répéter le raisonnement précédent en remplaçant G et G par les anasymètres paratactiques désignés par C et $\bar{C}$. D'où comme lieu une cyclide équilatère qui contient C, $\bar{C}$ et 2 anasymètres conjugués quelconques de la série Ω' : cette cyclide équilatère n'est donc autre que la cyclide contenant Ω' et la série complémentaire Ω.

Dans ce cas, tous les cercles d'une série droite de la cyclide sont, comme on l'a vu, des anasymètres, tandis que les cercles de la V. S. D. complémentaire, paratactiques à C_1 et C_2 sont cercles de base de R. A. propres (d'angle $\neq \pi$) à l'exception des 2 anasymètres C et $\bar{C}$.

Examinons enfin le cas singulier.

C - C_1 et C_2 conjugués.

2 anasymètres conjugués, paratactiques à C_1 C_2, et 2 anasymètres conjugués non paratactiques à C_1C_2 déterminent de même une cyclide équilatère lieu des cercles de base des R. A. : quels que soient les couples choisis, il est immédiat que l'on obtient la même cyclide, déjà définie dans l'étude des transpositions échangeant C_1 et C_2, dont tous les cercles de Villarceau sont des anasymètres.

Il n'existe pas de R. A. propres transformant C_1 en C_2 mais seulement des transpositions.

En résumé, dans les 3 cas, on a obtenu les 2 séries d'une cyclide équilatère comme lieu des cercles de base des R. A. propres ou singulières ; mais, quand on passe du cas A) au B) puis C), les cercles d'une des séries puis des 2 séries deviennent des anasymètres.

D - Cas où C_1 et C_2 sont cosphériques.

Supposons C_1 et C_2 sur une même sphère S et soient Γ_1 et Γ_2 les cercles bissecteurs de C_1 et C_2, Σ_1 et Σ_2 les sphères $\perp$ à S selon Γ_1 et Γ_2. Il est immédiat que les anasymètres sont les intersections des sphères Σ_1 et Σ_2 avec les sphères du faisceau à points limites $C_1 \cap C_2$. Les cercles $\perp$ aux précédents situés sur Σ_1 et Σ_2, appartenant aux 2 faisceaux sphériques à points de base $C_1 \cap C_2$ sont les bases des R. A. transformant C_1 en C_2.

On peut dire que la cyclide équilatère de Dupin, précédemment trouvée dégénère en 2 sphères orthogonales, chaque V-série dégénérant en 2 faisceaux sphériques.

XI - SYSTEMES DE 3 CERCLES ORTHOGONAUX A UNE MEME SPHERE S

Soient C_1, C_2, C_3 3 cercles $\perp$ à S ; Γ_{12} , Γ_{23} , Γ_{31} les cyclides équilatères lieux des cercles de base des anarotations relatives aux couples C_1C_2, C_2C_3 , C_3C_1.

Γ_{12} et Γ_{23} se coupent selon une anallagmatique γ_{12}^{23} (par (S)). Par 2 points inverses dans (S) de γ_{12}^{23} passent 2 cercles de Villarceau de Γ_{12} et 2 cercles de Villarceau de Γ_{23}. Choisissons l'un d'eux dans chaque paire, soit :

$$G_{12}^{i} \subset \Gamma_{12} \qquad (i = 1 \text{ ou } 2)$$

$$G_{23}^{j} \subset \Gamma_{23} \qquad (j = 1 \text{ ou } 2)$$

Ce sont des cercles de base de R. A. transformant C_1 en C_2 et C_2 en C_3, soit :

$$(G_{12}^{i})_{\theta} \quad \text{et} \quad (G_{23}^{j})_{\theta'}$$

Alors $(G_{12}^{j})_{\theta}$. $(G_{23}^{j})_{\theta'}$ transforme C_1 en C_3

Les cercles de base étant cosphériques, le produit précédent est une R.A. transformant C_1 en C_3, dont le cercle de base appartient à Γ_{31} et contient les points $G^{i}_{12} \cap G^{j}_{23}$

Ainsi : $\gamma^{23}_{12} \subset \Gamma_{31}$

Donc, Γ_{12} , Γ_{23} , Γ_{31} contiennent une même anallagmatique γ , telle que $\gamma \cup \mathcal{C}$ (ombilicale) soit l'intersection totale des cyclides prises 2 à 2.

Transformation de 3 ou 4 cercles de l'espace en 3 ou 4 cercles égaux.

Soient C_1, C_2, C_3 3 cercles quelconques de l'espace.

Les cyclides équilatères Γ_{12}, Γ_{23} , Γ_{31} n'appartiennent pas à un même faisceau dans le cas général où C_1, C_2, C_3 ne sont pas $\perp$ à une même S et se coupent en un nombre limité de points. Une inversion ayant l'un d'eux pour pôle transforme les cercles des cyclides passant en ce point, en droites, axes de rotations dans lesquelles les transformés de C_1 C_2 C_3 sont homologues, ce qui prouve que ces transformés sont égaux.

De même, on obtient 4 cercles égaux en transformant par inversion 4 cercles C_1 C_2 C_3 C_4 dont 3 sont $\perp$ à une même sphère, si on prend pour pôle d'inversion un point commun à l'anallagmatique γ relative à C_1 C_2 C_3 et à la cyclide équilatère Γ_{14} relative à C_1 et C_4 par exemple.

XII - PROPRIETES DES CERCLES PARATACTIQUES -

1/ C_1 et C_2 étant 2 tels cercles, soient a_1 a'_1 des points de C_1 homologues dans (S) et b_2 b'_2 des points de C_2 homologues dans (S). Le cercle C' contenant ces 2 couples définit avec C_1 et C_2 une cyclide de Dupin dont la quadrique associée contient les axes de C_1 C_2 C' ainsi que les isotropes de S contenant les foyers de C_1 et C_2. La V-série Γ contenant C_1 et C_2 a en commun avec la V. S. D. Ω lieu des cercles supports des R.A. transformant C_1 en C_2 2 cercles conjugués G et $\bar{G}$; en effet, les semi-quadriques associées à 2 V. S. D. s'appuyent sur les isotropes contenant les foyers de C_1 et C_2 ; elles ont donc en commun 2 droites réciproques dans la polarité définie par S.

Par $C' \cap G$ passe un anasymètre $\perp$ à $C' \subset \Omega'$ complémentaire de Ω, puisque Γ est invariante dans une telle transposition qui conserve les anaxes (situés sur Ω) de cette série, ainsi que l'ensemble C_1, C_2. Dans cette transposition :

C' a pour homologue C'

C_1 " C_2

donc (a_1, a'_1) " (a_2, a'_2)

Même raisonnement avec $\bar{G}$.

Ainsi, de 2 manières différentes, on peut transformer un couple de points de C_1 inverses dans (S) en un autre tel couple de C_2, par 2 transpositions relatives à 2 cercles conjugués.

2/ On retrouve incidemment que tout cercle cosphérique à 2 cercles paratactiques les coupe sous le même angle, angle superficiel constant sous lequel se coupent 2 cercles appartenant à des séries distinctes de la cyclide de Dupin contenant C_1 C_2 C'.

Plus généralement, soient C'_1 et C'_2 2 cercles séparément cosphériques à C_1 et C_2, appartenant tous les quatre à une même cyclide de Dupin. On montre qu'il existe 2 anasymètres conjugués laissant C_1 invariant et permutant C'_1 et C'_2, donc aussi $C_1 \cap C'_1$ et $C_1 \cap C'_2$: d'où l'invariance de l'angle superficiel.

3/ Soit U un anaxe de la cyclide $\mathcal{C}$ contenant C_1 C_2 C' ;

S_1 la sphère U ∪ (C_1 ∩ C')

S_2 " U ∪ (C_2 ∩ C')

(S_1) anallagmatie de $\mathcal{C}$ transforme C_1 en C' que (S_2) transforme en C_2. Remarquons que S_1 est ⊥ à la sphère C_1 ∪ C' et S_2 ⊥ C_2 ∪ C'.

Il existe un anasymètre ⊥ à U et C' échangeant C_1 ∩ C' et C_2 ∩ C', donc S_1 et S_2, [U ∪ (C_1 ∩ C')] et U ∪ (C_2 ∩ C'). Donc le cercle S_1 ∩ [U ∪ (C_1 ∩ C')] s'échange avec S_2 ∩ [U ∪ (C_2 ∩ C')] qui lui est donc paratactique. Si on applique à ces 2 cercles les résultats du 2/, l'angle des sphères S_1, S_2 est celui des sphères C_1 ∪ C' et C_2 ∪ C'. Or, l'angle S_1, S_2 est la moitié de l'angle d'une R.A. transformant C_1 en C_2. Donc, pour une cyclide donnée, l'angle formé par 2 sphères variables contenant respectivement un C_1 et un C_2 fixe ainsi qu'un cercle commun variable C' de l'autre série est constant.

Dans le cas C' ⊥ C_1 et C' ⊥ C_2, $\mathcal{C}$ est équilatère et l'angle formé par les 2 sphères précédentes n'est autre que l'angle sous lequel une sphère quelconque contenant C_1 coupe C_2 : c'est par définition le V-angle des 2 cercles paratactiques.

Ainsi, le V-angle de 2 cercles paratactiques est la moitié de l'angle d'une R.A., ayant pour cercle de base l'un ou l'autre des anaxes de la cyclide équilatère qui les contient et transformant l'un des 2 cercles en l'autre, car la démonstration précédente montre que l'angle de R.A. est le même pour les 2 cercles conjugués qui sont les anaxes de la cyclide équilatère considérée.

Réciproquement, cherchons le lieu du cercle de section de 2 sphères contenant C_1 et C_2 et se coupant sous un angle donné. Soit S_1 une sphère contenant C_1 et coupant C_2 en S_1 ∩ C_2. Par C_2 passent 2 sphères coupant S_1 sous l'angle donné (elles sont confondues si l'angle est droit) : soient S'_2 ∩ C_1 et S''_2 ∩ C_1 les points d'intersection de S'_1 et S''_1 avec C_1. Par S_1 ∩ C_2 et S'_2 ∩ C_1 passe un cercle C' définissant avec C_1 et C_2 une cyclide de Dupin $\mathcal{C}'$. De même, par S_1 ∩ C_2 et S''_2 ∩ C_1 passe un C' définissant avec C_1 et C_2 une cyclide de Dupin $\mathcal{C}''$.

Comme la construction précédente montre que par le couple S_1 ∩ C_2 passent 2 cercles d'intersection de couples de sphères contenant C_1, C_2 et se coupant sous l'angle donné, ces 2 cercles appartiennent respectivement aux cyclides $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$, puisque par tout couple S_1 ∩ C passe un cercle de chaque cyclide, répondant à la question d'après l'étude antérieure.

En résumé, le lieu se compose de 2 V-séries dont les complémentaires contiennent C_1 et C_2 (elles sont confondues si l'angle donné est le V-angle des 2 cercles). Si $C_1 = \bar{C}_2$ le problème n'est possible que si le V-angle est $\frac{\pi}{2}$ et il admet alors ∞^1 solutions : les V.S.D. contenant C_1 et C_2.

Les 2. V.S.O. trouvées ont pour anasymètres (les conservant et les échangeant) les cercles de la V.S.D. contenant les cercles ⊥ à C_1 et C_2, et les 2 cercles intersections de la V-série complémentaire de la précédente et de la V.S.D. contenant les anaxes des 2. V.S.O.

XIII - PROPRIETES PARATACTIQUES DES CYCLIDES DE DUPIN -

1/ La V.S.D. Ω lieu des cercles de base des R.A. transformant C_1 en C_2 peut être considérée comme le lieu des anaxes conjuguées des V-séries contenant C_1 et C_2. Du 3/ résulte que Ω peut être considérée comme lieu du

cercle d'intersection d'une sphère bissectrice des cercles C_1 et C' avec une sphère bissectrice de C_2 et C'.

2/ λ étant le V-angle superficiel de la cyclide de Dupin $\mathcal{C}$ définie par $C_1\ C_2\ C'$, on voit que S_1 coupe C_1 sous l'angle $\frac{\lambda}{2}$ ($\frac{\pi}{4}$ si la cyclide est équilatère). Donc le V-angle d'un anaxe et d'un V-cercle de $\mathcal{C}$ est constant et égal à $\frac{\lambda}{2}$ ou $\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{2}$ suivant la V-série de $\mathcal{C}$ considérée (resp. $\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\lambda}{2}$ si on considère le deuxième anaxe).

$\frac{\lambda}{2}$ et $\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{2}$ sont les angles rayons de la cyclide ou des V-séries qu'elle contient.

Remarquons que tout cercle d'une cyclide $\mathcal{C}$ d'angle superficiel λ est anaxe d'une V.S. de rayon $\frac{\lambda}{2}$ contenant un des anaxes de $\mathcal{C}$ et d'une V.S. de rayon $\frac{\lambda}{2}+\frac{\pi}{2}$ contenant l'autre anaxe de $\mathcal{C}$. Les 2 V.S. sont confondues suivant une même V.S.D. si $\lambda=\frac{\pi}{2}$.

3/ Soient U et U' 2 anaxes d'une cyclide $\mathcal{C}$ dont un V-cercle générateur est C : les ∞^1 cercles $\perp$ communs à C et à l'anneau U, $\bar{U}$ sont des anasymètres pour $\mathcal{C}$. Soient γ et γ' 2 tels cercles paratactiques.

On transforme le produit $(\gamma).(\gamma')$ de transpositions en remarquant que :

$$(\gamma) = (U \cup \gamma).\ (\bar{U} \cup \gamma)$$

$$(\gamma') = (U \cup \gamma').\ (\bar{U} \cup \gamma')$$

Alors :

$$(\gamma).(\gamma') = (U \cup \gamma).\ (\bar{U} \cup \gamma).\ (U \cup \gamma').\ (\bar{U} \cup \gamma')$$

$$= (U \cup \gamma).\ (U \cup \gamma').\ (\bar{U} \cup \gamma).\ (\bar{U} \cup \gamma')$$

Or, les 2 premières sphères se coupent sous le même angle que les 2 dernières. Donc le produit de 2 transpositions ayant pour bases 2 cercles paratactiques γ et γ' est réductible à 2 R.A. de même angle ayant pour bases 2 cercles conjugués qui leur sont $\perp$.

De plus, γ restant fixe et γ' variant, il est toujours possible d'après le 1/ de transformer un couple de points inverses dans (S) en un autre tel couple de points de C par un choix convenable de γ' ou $\bar{\gamma}'$.

Réciproquement, le produit de 2 R.A. de même angle relatives à 2 cercles conjugués peut, d'une manière unique, se décomposer en un produit de 2 T.A. ayant pour bases 2 cercles qui leur sont $\perp$, une fois qu'on a fixé le premier de ces cercles de base : le 2è cercle doit alors être choisi parmi l'un ou l'autre de 2 cercles conjugués, ce dernier choix étant fixé par le sens relatif des 2 cycles qu'on distingue sur les supports conjugués des 2 R.A. de même angle.

(On rappelle que l'orientation d'un cycle de base est la notion transmuée par inversion de l'orientation d'un axe de rotation dans l'espace, la rotation étant considérée comme le produit de 2 symétries planes).

En définitive, le produit de 2 R.A. de même angle variable relatives à 2 cycles conjugués est une transformation continue, appelée opération paratactique continue, désignée par O.P., qui fait décrire à tout point de l'espace un des V-cercles de la cyclide de Dupin passant par ce point et admettant pour anaxes les supports des 2 cycles (si on renverse le sens de l'un des

cycles, on obtient le 2è V-cercle contenant le point considéré ; il y a 2 types d'O. P. selon le sens relatif des cycles).

4/ Remarquons enfin comme conséquence immédiate de ce qui précéde que la C. N. S. pour que 2 V. S. D., se coupant suivant 2 cercles conjugués, soient orthogonales en tout point de leur intersection, est que les anaxes de l'une soient contenus dans l'autre.

XIV - SYNTHESE D'UNE CONGRUENCE PARATACTIQUE -

Soient X et $\bar{\bar{X}}$ 2 isotropes de même système passant par les points imaginaires d'intersection d'une droite réelle avec S : $\bar{\bar{X}}$ est le lieu de f conjugué de $f \in X$ si le rayon de S est R = i ou du symétrique de ce point par rapport à un plan diamétral de S si R = 1.

Soit C. L. la congruence linéaire des droites $f\bar{\bar{f}}$ lieu des axes des cercles $C \perp$ à S et de foyers f et $\bar{\bar{f}}$. Les droites $f\bar{\bar{f}}$ de C. L. sont toutes réelles si R = i, et si R = 1, 2 seulement sont réelles et réciproques par rapport à S. Deux semi-quadriques quelconques de C. L. ont en commun deux droites de C. L. On voit que les cercles dont les axes engendrent C. L. sont 2 à 2 paratactiques et on dit qu'ils forment une congruence paratactique $\mathcal{C}.\mathcal{P}$.

Soient D et $\bar{D}$ 2 droites, réciproques dans la polarité définie par S et $\in$ C. L., une droite $\Delta \in$ C. L., X' et $\bar{\bar{X}}'$ 2 isotropes de S de système différent de X, contenant les points d'intersection de X, $\bar{\bar{X}}$ avec D, $\bar{D}$:

X', $\bar{\bar{X}}'$, Δ définissent une semi-quadrique $\subset$ C. L. associée à une V-série dont les anaxes U et $\bar{U}$ sont les cercles de $\mathcal{C}\ \mathcal{P}$ d'axes D et $\bar{D}$ et dont le cercle générateur est le cercle $\perp$ à S d'axe variable Δ .

Ainsi les cercles de $\mathcal{C}\ \mathcal{P}$ peuvent être considérés comme V-cercles de V-séries d'anaxes communs U et $\bar{U}$, ces 2 derniers cercles formant un anneau quelconque de $\mathcal{C}\ \mathcal{P}$: d'où $l'\infty^2$ façons de répartir les cercles d'une $\mathcal{C}\ \mathcal{P}$ en familles de séries coanaxiales (mêmes anaxes), selon le choix du couple $U\bar{U}$.

A remarquer que les complémentaires des séries coanaxiales d'anaxes communs U et $\bar{U}$ engendrent la $\mathcal{C}\ \mathcal{P}$ admettant X' et $\bar{\bar{X}}'$ pour isotropes de base.

Les ∞^1 bases équivalentes d'une O. P. forment une $\mathcal{C}\ \mathcal{P}$

Soit $\mathcal{A}$ l'anneau de base d'une O. P. d'angle V : on peut décomposer cette O. P. de ∞^2 manières en un produit de 2 T. A. dont les cercles de base sont $\perp$ à ceux de $\mathcal{A}$ et appartiennent à l'une $\mathcal{C}\ \mathcal{P}'$ des 2 congruences paratactiques contenant $\mathcal{A}$; soit $\mathcal{A}'$ l'anneau des anaxes de la cyclide de Dupin déterminée par $\mathcal{A}$ et les 2 anasymètres C'_1 C'_2 ; désignons par V et V' les 2 V-séries de la cyclide qui contiennent respectivement $\mathcal{A}$ et le couple C'_1 C'_2.

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ appartiennent à une même congruence paratactique $\mathcal{C}\ \mathcal{P}$ et V' à une $\mathcal{C}\ \mathcal{P}'$ telle que : $\mathcal{A}' = \mathcal{C}\ \mathcal{P} \cap \mathcal{C}\ \mathcal{P}'$

Inversement, tout anneau de V peut être choisi pour base de l'O. P. . Ainsi, tout anneau d'une V-série droite quelconque (puisque C'_1 peut être choisi arbitrairement) contenant $\mathcal{A}$ et appartenant à $\mathcal{C}\ \mathcal{P}$, c'est-à-dire un anneau quelconque de $\mathcal{C}\ \mathcal{P}$, peut être choisi pour base de l'O. P.

D'où l'interprétation d'une $\mathcal{C}\ \mathcal{P}$ comme lieu des anneaux de base des réductions canoniques équivalentes d'une O. P.

En outre, il est immédiat que tout cercle de $\mathcal{C}\ \mathcal{P}$ est invariant par l'O. P. (utilisation d'un produit équivalent tel que : $(C'_1)(C'_2)$).

Remarque fondamentale.

Une inversion dont la sphère directrice contient un cycle de $\mathfrak{A}'$ conserve ce cercle et remplace le deuxième cycle de $\mathfrak{A}'$ par son opposé. L'homologue de $\mathcal{C}\mathcal{P}$ est $\mathcal{C}\mathcal{P}'$, qui est donc lieu des bases des réductions canoniques équivalentes de l'O. P. de même anneau de base et même angle, mais dont le sens relatif des cycles est différent.

Ainsi, une $\mathcal{C}\mathcal{P}$ et une $\mathcal{C}\mathcal{P}'$ dont les isotropes de base sont de systèmes différents correspondent à 2 O. P. de types différents.

CHAPITRE II

GÉOMÉTRIE DES V-SERIES D'UNE CONGRUENCE PARATACTIQUE

I - ANGLE DE 2 V-SERIES CONGRUENTES -

Soient Γ_1 et Γ_2 2 V-séries d'une même $\mathcal{C}\mathfrak{T}$. Elles ont en commun 2 cercles C_1 et C_2 de $\mathcal{C}\mathfrak{T}$.

Remarquons d'abord que toute V.S.D. de $\mathcal{C}\mathfrak{T}$ qui contient les anaxes d'une V-série $\Gamma \subset \mathcal{C}\mathfrak{T}$ coupe Γ suivant 2 cercles en chaque point desquels la V.S.D. complémentaire est $\perp$ à Γ (résulte presque immédiatement de l'étude des R.A. transformant un cercle en un autre). Les V.S.D. de $\mathcal{C}\mathfrak{T}$ qui contiennent les anaxes d'une V-série de $\mathcal{C}\mathfrak{T}$ jouent pour cette dernière le rôle des diamètres d'un cercle en géométrie plane.

Par C_1 passent donc 2 V.S.D. de $\mathcal{C}\mathfrak{T}$ dont les complémentaires sont $\perp$ à Γ_1 et Γ_2 respectivement en tout point de C_1. Soient σ et σ' ces 2 V.S.D. : les V-angles de C_1 avec les cercles des anaxes de σ et σ' sont les mêmes. Donc une R.A. basée sur C_1 et d'angle convenable fait coïncider les anaxes de σ et σ' et par suite σ et σ' elles-mêmes, ce qui prouve qu'en tout point de C_1, σ et σ', donc Γ_1 et Γ_2, se coupent sous le même angle.

En tout point du 2è cercle commun C_2 les V.S.D. Γ_1 et Γ_2 se coupent aussi sous l'angle constant précédent, car une T.A. relative à un cercle de la V.S.D. complémentaire de celle qui contient les anaxes de Γ_1 et Γ_2 transforme C_1 en C_2 tout en laissant chacune des 2 V-séries Γ_1 Γ_2 invariante.

D'où résulte que Γ_1 et Γ_2 sont tangentes si C_1 appartient à la V.S.D contenant les anaxes de Γ_1 et Γ_2 : C_1 est alors transformé en lui-même dans la T.A. précédente et C_2 confondu avec C_1. Quand C_2 tend vers C_1 les 2 V-séries tendent à devenir tangentes et en particulier la V.S.D. déterminée par C_1 et C_2 devient tangente à Γ_1 et Γ_2 en tout point de C_1. Les semi-quadriques associées aux V-séries se raccordent alors selon l'axe de C_1.

2 V.S.O. de même V-angle superficiel λ peuvent être amenées en coïncidence par une R.A. convenable basée sur un de leurs cercles communs, puisque les 2 systèmes d'anaxes sont composés de cercles ayant mêmes V-angles avec un cercle commun aux 2 V-séries.

Plus généralement, considérons 2 surfaces engendrées par des cer-

cles d'une même $\mathcal{C}\mathcal{R}$: le long d'un cercle commun C, elles se raccordent respectivement aux 2 V. S. D. dont les semi-quadriques associées se raccordent le long de l'axe de C aux 2 surfaces lieux des axes des 2 surfaces cerclées précédentes. Les 2 surfaces se coupent donc sous le même angle en tout point de C.

Nous allons montrer qu'on peut construire une géométrie des cercles de $\mathcal{C}\mathcal{R}$ isomorphe à une géométrie caleyenne à deux dimensions, l'isomorphisme n'étant précisé qu'ultérieurement, car nous verrons que l'intérêt d'une étude intrinsèque provient de la possibilité d'associer aux cercles de $\mathcal{C}\mathcal{R}$ des R. A. dont ils sont les bases et d'utiliser en même temps les V-séries complémentaires des V-séries de $\mathcal{C}\mathcal{R}$, non représentées dans l'isomorphisme en question.

II - QUASI-ARC -

Soient C_1 et C_2 2 cercles d'une V-série Γ et C' un cercle de la série complémentaire Γ'. Une sphère S $\supset$ C' coupe Γ suivant un cercle C qui décrit toute la V-série Γ quand S tourne dans un sens constant autour de C' d'une R. A. continue d'angle total π. De la position $C_1 \cup C'$ à $C_2 \cup C'$, S doit donc subir par rapport à C' une R. A. dans un sens constant d'un angle W (aigu) ou π - W (les 2 R. A. étant de sens contraires).

On appellera quasi-arc $\overset{\frown}{C_1 C_2}$ la portion de Γ décrite par C quand la sphère précédente tourne de l'angle W dans une R. A. relative à C'. Cette portion de Γ est indépendante du choix de C' et W est donc bien déterminé. On peut aussi dire que le quasi-arc est la partie de Γ engendrée par une R. A., basée sur un anaxe de Γ, d'angle saillant 2 W, dans un sens constant, du cercle générateur C dont les positions initiale et finale (dites extrémités) sont C_1 et C_2.

Si on ne précise pas le sens de R. A., on parle indifféremment du quasi-arc $\overset{\frown}{C_1 C_2}$ ou $\overset{\frown}{C_2 C_1}$ caractérisé par l'angle aigu arithmétique W.

Quasi-segment.

Dans le cas d'une V. S. D. on considère en même temps que 2 cercles paratactiques C_1 et C_2 de cette V-série leurs conjugués $\bar{C}_1$ et $\bar{C}_2$. On appelle quasi-segment ambigu l'ensemble des 4 quasi-arcs (dits alors quasi-segments) ayant pour extrémités un cercle de l'anneau $C_1\bar{C}_1$ et un cercle de l'anneau $C_2\bar{C}_2$. Les 2 anneaux sont dits "extrémités du quasi-segment ambigu".

III - ANGLE D'UNE V. S. D. ET D'UNE V. S. O. DE $\mathcal{C}\mathcal{R}$ -

Soit Γ une V. S. O. de V-angle superficiel λ
σ une V. S. D.

Γ et σ se coupent sous un angle constant u tout le long de 2 cercles C_1 et C_2, de $\mathcal{C}\mathcal{R}$. Soit V le V-angle de C_1 et C_2, I un point de C_1, IT la tangente à C_1, C' le cercle de la V-série complémentaire Γ' de Γ, qui passe par I, Iθ sa tangente faisant avec IT l'angle aigu λ. Désignons par c' le cercle de σ', V-série complémentaire de σ, qui passe par I, IT la tangente à c'.

Le plan tangent à Σ est ΓIθ

" σ est TIt

Ces 2 plans se coupent sous un angle aigu u.

C_2 C' c' sont cosphériques, car C_2 et C' le sont et C' c' ayant I en commun passent aussi par I' inverse de I dans (S). Comme c' rencontre aussi C_2 la proposition est établie. La sphère qui les contient tous trois coupe C_1 sous l'angle aigu V.

Puisque le plan tangent en I est t I θ, V est l'angle de IT et de sa projection IT' sur le plan.

Dans le trièdre ITT'θ dont 2 faces sont λ et V, désignons par x la 3è face.

Le dièdre opposé à x a pour mesure $\frac{\pi}{2} - u$

" " λ est droit.

D'après les formules de trigonométrie sphérique :

$$\cos \lambda = \cos x \,.\, \cos V$$

$$\cos x = \cos \lambda \,.\, \cos V + \sin \lambda \,.\, \sin V. \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$$

$$= \cos \lambda \,.\, \cos V + \sin \lambda \,.\, \sin V. \sin u$$

D'où : $\cos \lambda = \cos \lambda . \cos^2 V + \sin \lambda \,.\, \sin u. \sin V. \cos V$

ou : $\cos \lambda \,.\, \sin^2 V = \sin \lambda \,.\, \sin u. \sin V. \cos V$

Or, $\sin V \neq 0$, car $V \neq 0$ et $\cos V \neq 0$ car $V \neq \frac{\pi}{2}$ puisque 2 cercles d'une même V.S.O. ne peuvent être conjugués.

Il vient donc : $\underline{\text{tg V. cotg } \lambda = \sin u} \qquad V \leqslant \lambda$

Variations de u quand C_2 décrit Γ, C_1 restant fixe.

Le quasi-arc $\overset{\frown}{C_1 C_2}$ de Γ étant caractérisé par son V-angle superficiel W, remarquons que W est l'angle dont doit tourner la sphère $C' \cup C'_2$ dans une R.A. basée sur C' pour venir coïncider avec la sphère $C' \cup C_1$; c'est aussi l'angle des plans tangents en I à ces 2 sphères. On a :

$$\cos V = \cos x. \cos \lambda + \sin x. \sin \lambda. \cos W$$

avec $x \neq \frac{\pi}{2}$, puisque $\lambda \neq \frac{\pi}{2}$

donc : $\cos V. \cos x = \cos^2 x. \cos \lambda + \sin x. \cos x. \sin \lambda. \cos W$

$$\cos \lambda. \sin^2 x = \sin x. \cos x. \sin \lambda \,.\, \cos W$$

Si $x = 0$, $W = \frac{\pi}{2}$ et si $x \neq 0$, il vient :

$$\cos W = \text{tg } x. \text{cotg } \lambda = \frac{\cos \lambda}{\sin \lambda} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos V. \sqrt{\cos^2 V - \cos \lambda}}{\sin \lambda \,.\, \cos V} =$$

$$= \frac{\sqrt{\cos^2 V - \cos^2 \lambda}}{\sin \lambda}$$

D'où la formule donnant W en fonction de V et λ :

$$\cos W = \frac{\sqrt{\cos^2 V - \cos^2 \lambda}}{\sin \lambda} \quad (\text{d'où } \cos V = \sqrt{1 - \sin^2 \lambda. \sin^2 W})$$

D'où le tableau :

W	$0 \nearrow \frac{\pi}{2}$
cos W	$1 \searrow 0$
cos V	$1 \searrow \cos \lambda$
V	$0 \nearrow \lambda$
sin u	$0 \nearrow 1$
u	$0 \nearrow \frac{\pi}{2}$

Ainsi, quand le V-angle de C_1 et C_2 décroît, C_1 restant fixe, l'angle de σ et de la V-série droite σ_1 tangente à Γ en C_1 diminue constamment et quand V tend vers 0, il en est de même de u.

La V. S. D. σ_1 apparaît comme la limite de la V. S. D. sécante σ.

IV - ORIENTATION D'UNE V-SERIE -

Soit Γ une V-série et C' un cercle $\subset \Gamma$ ' V-série complémentaire. C' après orientation devient le cycle $\overrightarrow{C'}$. Une sphère variable tournant dans une R. A. positive basée sur C' rencontre les cercles de Γ dans un ordre définissant le sens + sur Γ. Une V-série orientée sera notée $\overrightarrow{\Gamma}$.

Les anaxes sont alors orientés de manière qu'une R. A. positive basée sur l'un de ces cycles déplace le cercle générateur de Γ dans le sens + sur $\overrightarrow{\Gamma}$.

Il est clair que l'orientation de Γ est indépendante du choix du cycle $\overrightarrow{C'}$ parmi tous ceux qui s'en déduisent par une R. A. continue basée sur un anaxe de Γ.

Orientation d'un quasi-arc (ou d'un quasi-segment)

L'orientation de $\overrightarrow{C'}$ conduit à considérer l'angle aigu algébrique dont tourne la sphère $C_1 \cup C'$ pour coïncider avec $C_2 \cup C'$. Soit W_{12} cet angle ; on a : $W_{12} = - W_{21}$.

C_1, C_2, C_3 désignant 3 cercles de la V-série orientée, on a dans tous les cas :

$$W_{13} = W_{12} + W_{23} \text{ (ou } V_{13} = V_{12} + V_{23})$$

La c. n. s. pour que C_2 appartienne au quasi-arc C_1C_3 est que W_{21} et W_{23} soient de signe contraire.

Un quasi-segment orienté se note $\overrightarrow{C_1C_2}$ (quasi-vecteur).

Un quasi-arc orienté, $\overrightarrow{C_1C_2}$.

Orientation d'une V. S. D. tangente à une V. S. O. orientée.

Soient C_1, C_2,2 cercles d'une V. S. O. orientée $\overrightarrow{\Gamma}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$ un quasi-arc positif et σ la V. S. D. contenant C_1 et C_2 orientée de manière que le quasi-vecteur $\overrightarrow{C_1C_2}$ soit de sens positif.

Quand C_1 restant fixe, V_{12} tend vers 0, $\vec{\sigma}$ tend vers une V. S. D. $\vec{\sigma}_1$ tangente à $\overrightarrow{\Gamma}$ le long de C_1 et qu'on nomme quasi-tangente positive à $\overrightarrow{\Gamma}$.

Orientons C_1 de manière qu'une R. A. dans le sens positif relativement à $\overrightarrow{C_1}$ amène $\vec{\sigma}_1$ sur $\vec{\sigma}$ (angle $< \pi$) : $(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma})$ est un angle positif égal à u ou $\pi - u$,

$$\sin(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}) = \operatorname{tg} V_{12} \cdot \operatorname{cotg} \lambda$$

V_{12} est un V-angle orienté (ici positif) pour le quasi-vecteur $\overrightarrow{C_1C_2}$, λ désignant l'angle aigu superficiel de la cyclide $\supset \overrightarrow{\Gamma}$. C_2 est alors orienté de manière que $\overrightarrow{C_2}$ se déduise de $\overrightarrow{C_1}$ par une R. A. basée sur l'un des anaxes de $\overrightarrow{\Gamma}$.

On définit de même $\vec{\sigma}_2$ V. S. D. tangente orientée à $\overrightarrow{\Gamma}$. Comparons les angles $(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma})$ et $(\vec{\sigma}_2, \vec{\sigma})$.

On sait définir le cercle de base d'une T. A., échangeant C_1 et C_2, conservant C' ainsi que les V-séries Γ et σ (c'est un des 2 cercles conjugués de la V. S. D., lieu des bases des T. A. échangeant C_1 et C_2, incidentes à C').

Dans une telle T.A., $\overrightarrow{\Gamma}$ se transforme en $\overleftarrow{\Gamma}$ (orientation inverse).

$\overrightarrow{\sigma}$ " $\overleftarrow{\sigma}$

puisque la T.A. renverse le sens de $\overrightarrow{C'}$.

Donc, $\vec{\delta}_1$ se transforme en $\vec{\delta}_2$.

La R.A. basée sur un des anaxes orientées de $\overrightarrow{\Gamma}$ et qui transforme $\overrightarrow{C_1}$ en $\overrightarrow{C_2}$ peut se décomposer en un produit de 2 T.A. : l'une est la T.A. considérée, l'autre transforme $\overrightarrow{C_2}$ en $\overleftarrow{C_2}$. La T.A. considérée transforme donc $\overrightarrow{C_1}$ en $\overleftarrow{C_2}$ et les angles $(\vec{\delta}_1, \vec{\sigma})$ et $(\vec{\delta}_2, \vec{\sigma})$ homologues dans la T.A., sont égaux.

Mais, les indices désignant les cycles de base des R.A. correspondantes, on a :

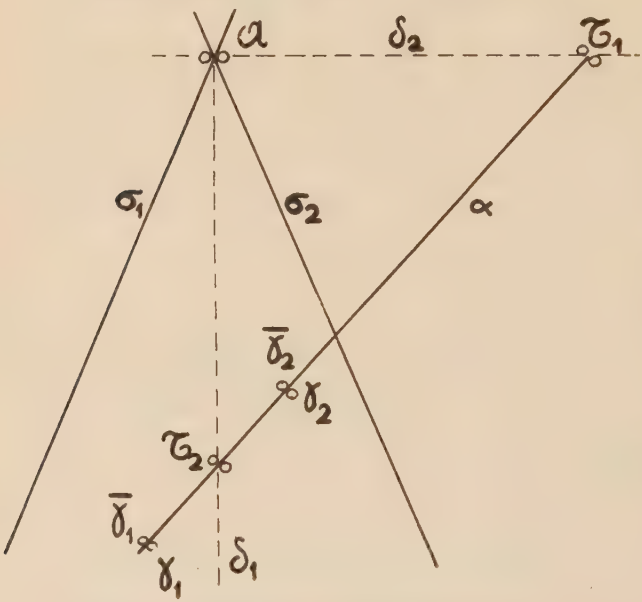
$$(\vec{\delta}_2, \vec{\sigma})_{\overleftarrow{C_2}} = (\vec{\sigma}_2, \vec{\sigma})_{\overleftarrow{C_2}} = -(\vec{\sigma}_2, \vec{\sigma})_{\overrightarrow{C_2}} = (\vec{\sigma}, \vec{\sigma}_2)_{\overrightarrow{C_2}}$$

Donc : $$(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma})_{\overrightarrow{C_1}} = (\vec{\sigma}, \vec{\sigma}_2)_{\overrightarrow{C_2}}$$

V - BILATERE FORME PAR 2 V.S.D.

2 V.S.D. σ_1 et σ_2 qui se coupent suivant un anneau $\mathcal{A}$ sont dites former un bilatère de $\mathcal{C}\mathcal{T}$. Leurs anaxes sont désignés par γ_1 et $\bar{\gamma}_1$, γ_2 et $\bar{\gamma}_2$.

V-séries bissectrices d'un bilatère



Il existe une V.S.D. δ'_1 lieu des anasymètres échangeant γ_1 et $\bar{\gamma}_2$, $\bar{\gamma}_1$ et $\bar{\gamma}_2$ donc σ_1 et σ_2 ; un tel anasymètre coupe donc σ_1 et σ_2 sous le même angle en des points de $\mathcal{A}$.

Nous dirons que la V.S.D. complémentaire δ_1 (qui appartient à $\mathcal{C}\mathcal{T}$) est une bissectrice du bilatère.

On définit de même une deuxième V.S.D. bissectrice δ_2 dont la complémentaire δ'_2 est le lieu des anasymètres échangeant γ_1 et $\bar{\gamma}_2$, $\bar{\gamma}_1$ et γ_2. δ_2 est $\perp$ à δ_1.

δ'_1 et δ'_2 étant les lieux des anasymètres échangeant les anneaux γ_1, $\bar{\gamma}_1$ et γ_2, $\bar{\gamma}_2$, on dit que les V.S.D. complémentaires, lieux des cercles supports des R.A. transformant l'anneau γ_1, $\bar{\gamma}_1$ en γ_2, $\bar{\gamma}_2$ sont les médiatrices du quasi-segment ambigu ayant pour extrémités les anaxes de σ_1 et σ_2. La V.S.D. α support de ce quasi-segment est telle que :

$$\begin{array}{ccc} & \perp & \delta_1 \\ \alpha & & \perp \\ & \perp & \delta_2 \end{array}$$

Donc l'anneau τ_1 des anaxes de δ_1 est $\alpha \cap \delta_2$

De même, l'anneau τ_2 des anaxes de δ_2 est $\alpha \cap \delta_1$.

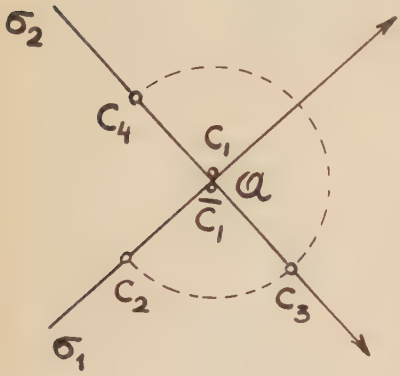
τ_1 et τ_2 sont les milieux du quasi-segment ambigu précédent. Un quasi-segment, tel que γ_1 $\bar{\gamma}_2$ par exemple, a 2 cercles milieux, l'un $\in \tau_1$, l'autre $\in \tau_2$.

Remarquons que la V. S. D. α admet pour anaxes les cercles de $\mathcal{A}$ et que les V-angles de 2 cercles quelconques choisis dans les anneaux différents $\mathcal{A}$, τ_1 , τ_2 sont tous égaux à $\frac{\pi}{4}$.

Bilatère orienté.

Soit une V. S. O. admettant pour anaxes les cercles de $\mathcal{A}$ et contenant C_2 cercle de σ_1 : elle coupe σ_2 selon 2 cercles C_3 et C_4 tels que C_1 désignant un cercle de $\mathcal{A}$ on ait :

$$V_{13} = - V_{14} = V_{21}$$

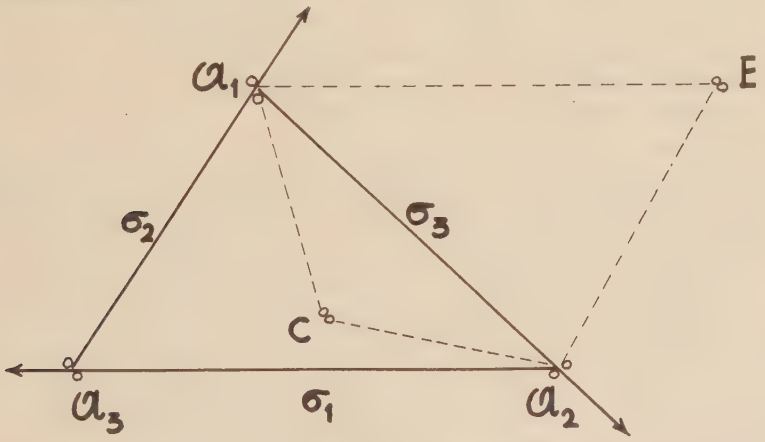


σ_1 étant orientée de C_2 vers C_1 et σ_2 de C_1 vers C_3, V_{13} et V_{21} sont positifs. On dira que $\vec{\sigma}_1$ et $\vec{\sigma}_2$ forment un bilatère orienté.

Par tout point de C_1 passent 2 anasymètres : l'un échangeant C_2 et C_3, l'autre C_2 et C_4, et par suite échangeant tous deux σ_1 et σ_2 : ils appartiennent donc l'un à δ_1, l'autre à δ_2. Il existe donc une seule V. S. D. bissectrice δ_1 telle que les anasymètres de la V. S. D. complémentaire échangent $\vec{\sigma}_1$ et $\vec{\sigma}_2$ tandis que l'autre δ_2 dont les anasymètres de la V. S. D. complémentaire δ'_2 échangent $\vec{\sigma}_1$ et $\bar{\vec{\sigma}}_2$ sera dite pseudo-bissectrice du bilatère.

Les cercles de δ_1 sont des bases des R. A. transformant $\vec{\sigma}_1$ en $\bar{\vec{\sigma}}_2$. Les cercles de δ_2 sont des bases des R. A. transformant $\vec{\sigma}_1$ en $\vec{\sigma}_2$.

VI - TRILATERE -



3 V. S. D. σ_1 σ_2 σ_3 se coupent 2 à 2 suivant 3 anneaux $\mathcal{A}_1$ $\mathcal{A}_2$ $\mathcal{A}_3$. Orientons de manière quelconque les 3 V. S. D. : on définit les bilatères $\vec{\sigma}_1$ $\vec{\sigma}_2$, $\vec{\sigma}_2$ $\vec{\sigma}_3$, $\vec{\sigma}_3$ $\vec{\sigma}_1$, dont les bissectrices et pseudo-bissectrices seront dites les bissectrices et pseudo-bissectrices du trilatère orienté.

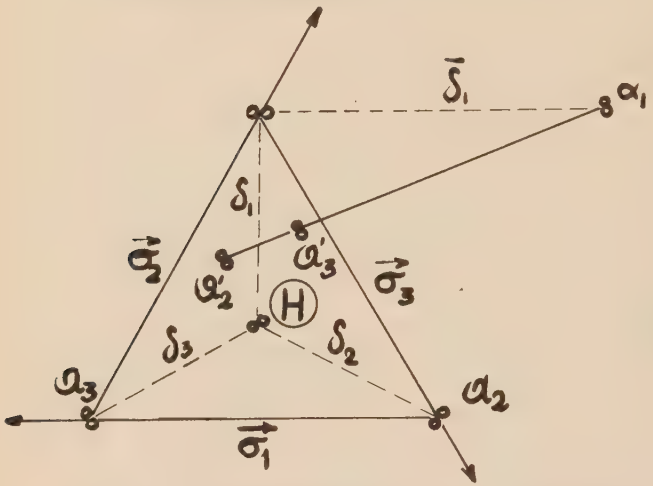
Les bissectrices des bilatères $\vec{\sigma}_2$ $\vec{\sigma}_3$ et $\vec{\sigma}_3$ $\vec{\sigma}_1$ ont en commun un anneau B dont un cercle quelconque est base d'une R. A. transformant $\vec{\sigma}_2$ en $\bar{\vec{\sigma}}_3$ et

c'est aussi la base d'une R.A. transformant $\vec{\sigma}_3$ en $\vec{\sigma}_1$. Le produit des 2 R.A. est une R.A. changeant $\vec{\sigma}_2$ en $\vec{\sigma}_1$: donc B appartient à la pseudo-bissectrice du bilatère $\vec{\sigma}_1\ \vec{\sigma}_2$.

Donc, dans un trilatère orienté, 2 bissectrices et une pseudo-bissectrice relative au 3è anneau-sommet ont en commun un même anneau B : il existe 3 anneaux tels que B.

On prouve de même que les 3 pseudo-bissectrices ont en commun un anneau C.

Trilatères associés



Considérons le trilatère ayant pour anneaux-sommets les anaxes de $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$ qui sont 3 anneaux notés :

$\alpha'_1\ \alpha'_2\ \alpha'_3$

La bissectrice $\bar{\delta}_1$ du bilatère $\vec{\sigma}_2\ \vec{\sigma}_3$ est une médiatrice du quasi-segment ambigu $\alpha'_2\alpha'_3$ (ainsi que la pseudo-bissectrice δ_1).

Si on oriente chaque cercle de α'_2 de manière qu'une R.A. positive basée sur un tel cercle déplace dans le sens + le cercle générateur de $\vec{\sigma}_2$ et qu'on agisse de même pour $\vec{\sigma}_3$, une R.A. relative à un cercle de $\bar{\delta}_1$ transforme les anaxes orientés de $\vec{\sigma}_2$ en ceux de $\vec{\sigma}_3$. On dira que $\bar{\delta}_1$ est une quasi-médiatrice du quasi-segment ambigu à extrémités orientées $\vec{\alpha}'_2$, $\vec{\alpha}'_3$ (δ_1 en est alors la médiatrice).

Ainsi, dans le trilatère à sommets orientés $\vec{\alpha}'_1\ \vec{\alpha}'_2\ \vec{\alpha}'_3$ associé au trilatère à côtés orientés $\vec{\sigma}_1\ \vec{\sigma}_2\ \vec{\sigma}_3$, 2 quasi-médiatrices et une médiatrice sont sont concourantes ainsi que les 3 médiatrices.

Orientons ce trilatère de manière quelconque : il en résulte pour les cercles des anneaux $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ une orientation se définissant comme celle de $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$ à partir du trilatère $\vec{\sigma}_1\ \vec{\sigma}_2\ \vec{\sigma}_3$. On a ainsi défini 2 trilatères dont tous les éléments sont orientés et qui jouent le même rôle l'un par rapport à l'autre : nous les dirons associés.

Les sommets de l'un sont les anaxes de l'autre ; les pseudo-bissectrices (resp. bissectrices) de l'un sont les médiatrices (resp. pseudo-médiatrices) de l'autre.

On considère aussi des trilatères associés non orientés, la notion de pseudo-bissectrice et pseudo-médiatrice disparaissant alors.

Propriétés relatives aux trilatères non orientés

1/ Médiatrices.

La notion d'association montre que les médiatrices d'un trilatère se coupent 3 à 3 suivant 4 anneaux, anaxes de 8 V-séries obliques contenant chacune un cercle de chacun des anneaux sommets : les V.S.O. se répartissent en couples de mêmes anaxes et les V-séries d'un couple sont engen-

drées par 2 cercles conjugués de sorte que les cyclides de Dupin auxquelles elles appartiennent ont même V-angle superficiel λ.

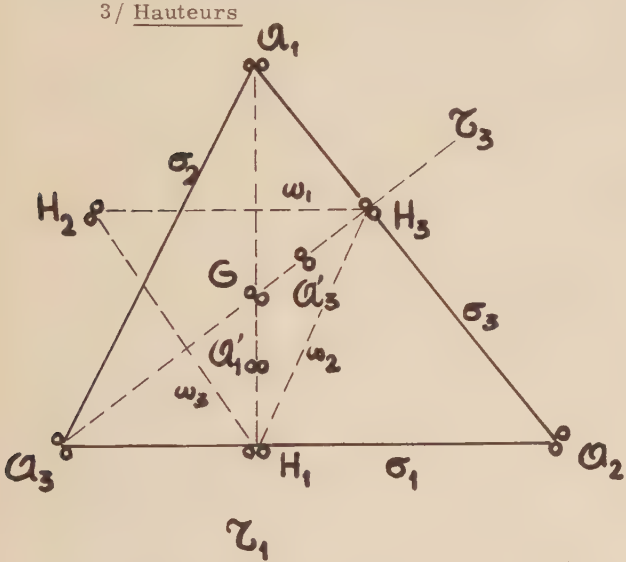
2/ Milieux

Soit θ l'anneau commun à 3 bissectrices concourantes du trilatère $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$ qui sont aussi des médiatrices du trilatère associé : δ_1 a pour anaxes les cercles de l'anneau $\alpha_1 = \bar{\delta}_1 \cap \mathcal{A}'_2\ \mathcal{A}'_3$ intersection des 2 V. S. D. δ_1 et $\mathcal{A}'_2\ \mathcal{A}'_3$ toutes 2 $\perp$ à δ_1 : α_1 est un des milieux du quasi-segment ambigu $\mathcal{A}'_2\ \mathcal{A}'_3$. Même raisonnement en permutant.

$\delta_1\ \delta_2\ \delta_3$ ayant un anneau commun θ, leurs anaxes $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ sont donc sur une même V. S. D. d'anaxes $\subset \theta$.

Donc les 6 anneaux milieux des côtés d'un trilatère sont 3 à 3 sur 4 V. S. D. ayant pour anaxes les cercles des anneaux qu'ont en commun 3 à 3 les bissectrices du trilatère associé. Comme il y a 2 anneaux tels que θ sur δ_1, par α_1 passent 2 des V. S. D. considérées. De même par permutation.

3/ Hauteurs



Soit τ_1 la V. S. D. contenant $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}'_1$: elle est $\perp$ à σ_1 puisqu'elle contient les anaxes de σ_1. On dira que c'est la hauteur du trilatère relative au côté σ_1.

L'anneau $H_1 = \sigma_1 \cap \tau_1$ est le pied de τ_1. Soit H le pied de la hauteur τ_3.

Soit ω_2 la V. S. D. $H_1 H_3$.

Soit ω_3 la V. S. D. transposée de ω_2 par les anasymètres de τ'_1, V. S. D. complémentaire de τ_1.

Soit ω_1 la V. S. D. transposée de ω_2 par les anasymètres de τ'_3, V. S. D. complémentaire de τ_3.

Soit H_2 l'anneau $\omega_1 \cap \omega_3$.

Par construction, σ_1 et τ_3 sont 2 bissectrices du trilatère $H_1 H_2 H_3$ telles que $\sigma_1 \cap \tau_3 = \mathcal{A}_3$; de même pour σ_3 et τ_1 telles que $\sigma_3 \cap \tau_1 = \mathcal{A}_1$.

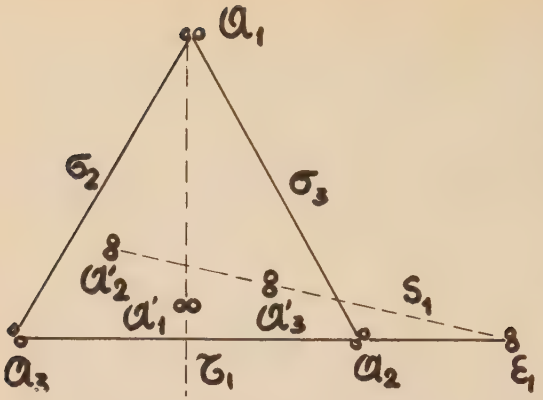
Comme $\sigma_2 \supset \mathcal{A}_1$ et $\supset \mathcal{A}_3$, $\sigma_2 \supset H_2$, puisque $\mathcal{A}_1\ \mathcal{A}_3$ est une bissectrice. Alors G $\mathcal{A}_2$ est aussi une bissectrice de $H_1\ H_2\ H_3$ et comme elle contient l'anneau G des anaxes de σ_2, elle est $\perp$ à σ_2 ; c'est donc la hauteur de $\mathcal{A}_1\ \mathcal{A}_2\ \mathcal{A}_3$, relative à σ_2.

Ainsi, les hauteurs d'un trilatère sont concourantes selon un anneau commun à 3 des bissectrices du trilatère $H_1\ H_2\ H_3$ formé par leurs pieds.

L'anneau ε_i des anaxes de τ_i est $\subset \sigma_i$ (car $\sigma_i \perp \tau_i$) i = 1, 2, 3. Les 3 anneaux ε_i sont sur une même V. S. D. dont les anaxes sont les cercles de G.

Propriétés relatives à 2 trilatères associés.

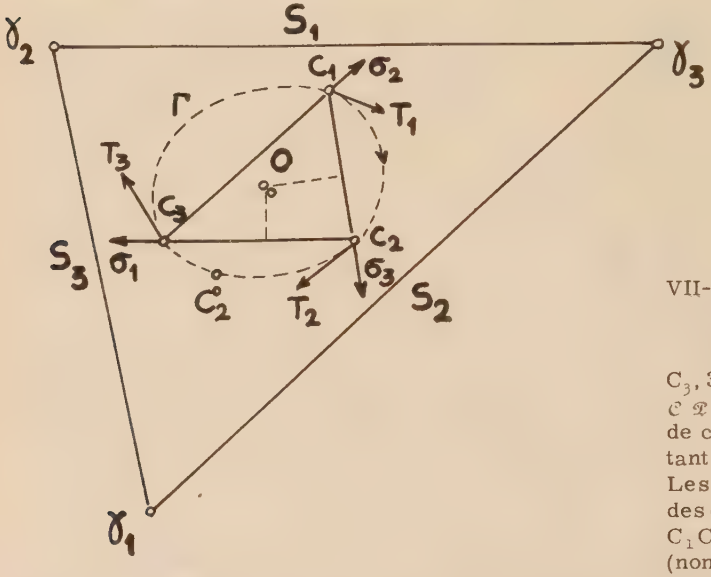
1/ De la définition même des hauteurs résulte qu'un trilatère et son



associé ont les mêmes hauteurs.

2/ $\tau_1, \sigma_2, \sigma_3$ ayant un anneau commun, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}'_2$, $\mathcal{A}'_3$, ε_1 sont sur une même V. S. D. ayant pour anaxes les cercles de $\mathcal{A}_1$ soit S_1. Donc $\varepsilon_1 = S_1 \cap \sigma_1$. Donc les côtés d'un trilatère rencontrent les côtés homologues du trilatère associé en 3 anneaux d'une même V. S. D. dont les anaxes sont communs aux 3 hauteurs des 2 trilatères.

Plus généralement, 3 V. S. D. ayant en commun un anneau Φ et contenant respectivement $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ ont leurs anaxes "alignés" sur les côtés du trilatère associé et réciproquement.



VII- QUASI-TRIANGLE -

Soient C_1, C_2, C_3, 3 cercles d'une $\mathcal{C}\mathcal{X}$, 2 quelconques de ces cercles n'étant pas conjugués. Les 3 médiatrices des quasi-segments C_1C_2, C_2C_3, C_3C_1 (non ambigus) ont en commun un anneau O dont les cercles sont les anaxes d'une V. S. O. Γ contenant $C_1\ C_2\ C_3$. Supposons Γ orientée de manière que son cercle générateur coïncide successivement avec $C_1\ C_2\ C_3$ dans cet ordre, quand il décrit Γ dans le sens positif.

Orientons σ_3 dans le sens du quasi-vecteur $\overrightarrow{C_1C_2}$, σ_1 dans celui de $\overrightarrow{C_2C_3}$, σ_2 dans celui de $\overrightarrow{C_3C_1}$. Soient $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{T}_3$, les V. S. D. tangentes positives en C_1, C_2, C_3 à Γ.

Faisons choix sur C_1 d'un cycle $\widehat{C_1}$ tel qu'une R. A. basée sur $\widehat{C_1}$ et d'angle saillant positif amène $\vec{\sigma}_3$ sur $\vec{T}_1$, puis sur C_2 un cycle $\widehat{C_2}$ se déduisant de $\widehat{C_1}$ par une R. A. basée sur un des cercles de l'anneau O d'un angle $2\ V_{12}$. Dans une telle R. A., $\widehat{C_2}$ se transforme en $\widehat{C'_2} \subset \vec{\Gamma}$ tel que l'un des quasi-arcs $\widehat{C_2C'_2}$ et $\widehat{C_2C_3}$ de Γ soit contenu dans l'autre. Donc l'angle saillant dont tourne $\vec{\sigma}_1$ autour de $\widehat{C_2}$ pour venir coïncider avec $\vec{T}_2$ est positif: même raisonnement pour l'orientation de $\widehat{C_3}$. Comme on passe de $\widehat{C_3}$ à $\widehat{C_1}$ par une R. A. d'angle $2\ V_{31}$ basée sur un cercle de O, on retrouve bien à partir du cycle $\widehat{C_3}$ le cycle $\widehat{C_1}$ initial

L'angle algébrique C_1 du quasi-triangle est l'angle $\vec{\sigma}_3$, $\vec{\sigma}_2$ de signe déterminé par le choix du cycle $\widehat{C_1}$. On peut écrire :

$$C_1 = (\vec{\sigma}_3 , \vec{\sigma}_2)_{\overrightarrow{C_1}} = (\vec{\sigma}_3, \vec{T}_1)_{\overrightarrow{C_1}} + (\vec{T}_1 , \vec{\sigma}_2)_{\overrightarrow{C_1}}$$

décomposition justifiée en remarquant que 3 V. S. D. concourantes selon un anneau C_1 ont leurs anaxes sur une même V. S. D. et qu'entre les V-angles de 3 cercles choisis dans ces anaxes, on peut écrire la relation de Chasles (ces V-angles sont les moitiés des précédents).

Remarquons que $(\vec{\sigma}_3, \vec{\sigma}_2)$ est saillant, car le cercle générateur C en se déplaçant sur Γ dans le sens positif rencontre par hypothèse C_2 avant C_3 .

Quasi-triangle associé.

Considérons le trilatère dont les côtés S_1 S_2 S_3 admettent pour anaxes les cercles C_1 C_2 C_3 et leurs conjugués, S_1 S_2 S_3 étant orientés par la donnée des cycles $\overrightarrow{C_1}$ $\overrightarrow{C_2}$ $\overrightarrow{C_3}$.

Choisissons dans l'anneau $S_1 \cap S_3$ d'un cercle γ_2 (l'un des anaxes de σ_2) que nous orientons d'après $\vec{\sigma}_2$. Une R. A. d'angle C_1 basée sur $\overrightarrow{C_1}$ transforme $\vec{\sigma}_2$ en $\vec{\sigma}_3$, donc $\overrightarrow{\gamma_2}$ en $\overrightarrow{\gamma_3}$ dont l'orientation se déduit bien comme précédemment de celle de $\vec{\sigma}_3$. De même une R. A. basée sur $\overrightarrow{C_2}$ transforme $\vec{\sigma}_3$ en $\vec{\sigma}_1$, $\overrightarrow{\gamma_3}$ en un cycle $\overrightarrow{\gamma_1}$ dont l'orientation concorde aussi avec celle de $\vec{\sigma}_1$. Le produit des 2 R. A. amène $\vec{\sigma}_2$ sur $\vec{\sigma}_1$ et $\vec{\gamma}_2$ sur $\vec{\gamma}_1$: c'est une opération conforme pouvant se décomposer en le produit de 2 R. A. dont l'une conserve $\vec{\sigma}_2$ et l'autre est la R. A. amenant $\vec{\sigma}_2$ sur $\vec{\sigma}_1$ donc $\overrightarrow{\gamma_2}$ sur $\overrightarrow{\gamma_1}$.

Le quasi-triangle ainsi construit est donc bien déterminé par le choix d'un cercle dans l'un des anaxes des côtés du quasi-triangle donné. Il y a donc 2 quasi-triangles associés à un quasi-triangle : leurs cercles "sommets" sont deux à deux conjugués.

Un quasi-triangle et son associé se définissent l'un par rapport à l'autre de la même manière : on peut dire qu'ils sont réciproques dans une relation de dualité associant à chaque V. S. D. de $\mathcal{C}\mathcal{T}$ un anaxe, à la relation de conjugaison près.

Remarque.

Les V. S. D. σ_1 σ_2 σ_3 se coupent 2 à 2 suivant 3 anneaux auxquels appartiennent respectivement C_1 C_2 C_3. On peut donc, à partir d'un trilatère, déterminer 8 quasi-triangles dont les supports des côtés sont les côtés du trilatère.

VIII - RELATIONS FONDAMENTALES DANS UN QUASI-TRIANGLE -

Désignons par u_{31} l'angle positif saillant dont tourne $\vec{\sigma}_1$ autour de $\overrightarrow{C_3}$ dans une R. A. qui l'amène sur $\vec{T}_3$:

$$u_{31} = (\vec{T}, \vec{\sigma}_2) \quad \text{etc.}$$

On a :

$$C_1 = u_{12} + u_{31}$$

$$C_2 = u_{23} + u_{12}$$

$$C_3 = u_{31} + u_{23}$$

On déduit : $2\,u_{12} = C_1 + C_2 - C_3$ et $u_{12} < \frac{\pi}{2}$ etc. et, en désignant par V_{12} le V-angle de C_1 et C_2 :

$$\frac{\sin \frac{C_1 + C_2 - C_3}{2}}{\operatorname{tg} V_{12}} = \frac{\sin \frac{C_2 + C_3 - C_1}{2}}{\operatorname{tg} V_{23}} = \frac{\sin \frac{C_3 + C_1 - C_2}{2}}{\operatorname{tg} V_{31}} = \operatorname{cotg} \lambda \quad (1)$$

(Tous les angles figurant dans les fonctions circulaires sont positifs).

Posons : $\operatorname{cotg} C_1/2 = t_1 \quad \operatorname{cotg} C_2/2 = t_2 \quad \operatorname{cotg} C_3/2 = t_3$

$\operatorname{cotg} V_{12} = \theta_3 \quad \operatorname{cotg} V_{23} = \theta_1 \quad \operatorname{cotg} V_{31} = \theta_2$

On remarque que :

$$\sin \frac{C_1 + C_2 - C_3}{2} = \sin \frac{C_1}{2} \sin \frac{C_2}{2} \sin \frac{C_3}{2} (1 + t_3 t_2 + t_3 t_1 - t_1 t_2)$$

Posons pour abréger :

$$\begin{aligned} a &= 1 + t_1 t_2 + t_1 t_3 - t_2 t_3 \\ b &= 1 + t_2 t_3 + t_1 t_2 - t_1 t_3 \\ c &= 1 + t_1 t_3 + t_2 t_3 - t_1 t_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

Il vient :

$$a\ \theta_1 = b\ \theta_2 = c\ \theta_3 = \frac{\operatorname{cotg} \lambda}{\sin \frac{C_1}{2} \sin \frac{C_2}{2} \sin \frac{C_3}{2}} \qquad (3)$$

(λ angle superficiel de la V.S.O. circonscrite au quasi-triangle).

Dans le quasi-triangle associé $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ dont les V-angles des côtés ont pour mesures respectives $\nu_{23}, \nu_{31}, \nu_{12}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 2\ V_{23} \qquad \gamma_2 = 2\ V_{31} \qquad \gamma_3 = 2\ V_{12} \\ 2\ \nu_{23} &= C_1 \qquad 2\ \nu_{31} = C_2 \qquad 2\ \nu_{12} = C_3 \end{aligned} \qquad (4)$$

En appliquant au quasi-triangle associé les relations (1), il vient, compte tenu (4) :

$$\frac{\sin (V_{23} + V_{31} - V_{12})}{\operatorname{tg} C_{3/2}} = \cdot = \cdot \qquad (5)$$

Posons :

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + \theta_1 \theta_2 + \theta_1 \theta_3 - \theta_2 \theta_3 \\ \beta &= 1 + \theta_2 \theta_3 + \theta_2 \theta_1 - \theta_3 \theta_1 \\ \gamma &= 1 + \theta_3 \theta_1 + \theta_3 \theta_2 - \theta_1 \theta_2 \end{aligned} \qquad (6)$$

Les relations (5) deviennent :

$$\alpha\ t_1 = \beta\ t_2 = \gamma\ t_3 = \frac{\operatorname{cotg} \lambda'}{\sin V_1 \sin V_2 \sin V_3} \qquad (7)$$

(λ' angle superficiel de la V.S.O. circonscrite à l'associé).

En définitive, les relations fondamentales entre les angles du quasi-triangle et les V-angles de ses côtés sont :

$$\begin{cases} a\ \theta_1 = b\ \theta_2 = c\ \theta_3 \left(= \dfrac{\operatorname{cotg} \lambda}{\sin \frac{C_1}{2} \sin \frac{C_2}{2} \sin \frac{C_3}{2}} \right) \\ \alpha\ t_1 = \beta\ t_2 = \gamma\ t_3 \quad \left(= \dfrac{\operatorname{cotg} \lambda'}{\sin V_1 \sin V_2 \sin V_3} \right) \end{cases} \qquad (8)$$

C'est encore le système de relations entre les cotangentes des V-angles des sommets et des côtés du quasi-triangle associé. Les θ_i, t_i, a, b, c, α, β, γ sont tous positifs.

Les 4 relations (8) doivent se réduire à 3 relations indépendantes, car un quasi-triangle est parfaitement déterminé, par exemple quand on donne un angle au sommet et les V-angles des 2 côtés qui comprennent cet angle (à une transformation conforme près). On a :

$$\theta_1 = \frac{c}{a}\ \theta_3 \qquad \theta_2 = \frac{c}{b}\ \theta_3$$

Alors les relations (8) donnent :

$$t_2\left(1 + \frac{c^2}{ab}\theta_3^2 + \frac{c}{a}\theta_3^2 - \frac{c}{b}\theta_3^2\right) = t_2\left(1 + \frac{c}{b}\theta_3^2 + \frac{c^2}{ab}\theta_3^2 - \frac{c}{a}\theta_3^2\right)$$

D'où :

$$c\ \theta_3^2\left[t_1(c + b - a) - t_2(a + c - b)\right] = ab\,(t_2 - t_1)$$

Mais :

$$c + b - a = 1 - t_1t_2 - t_1t_3 + 3\,t_2t_3 = 4\,t_2t_3 - d$$

$$a + c - b = 1 - t_1t_2 - t_2t_3 + 3\,t_1t_3 = 4\,t_1t_3 - d$$

$$\left.\begin{aligned} t_1(c + b - a) &= 4\,t_1t_2t_3 - dt_1 \\ t_2(a + c - b) &= 4\,t_1t_2t_3 - dt_2 \end{aligned}\right\} \text{ avec } d = t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 - 1$$

D'où :

$$cd\ \theta_3^2 = ab \qquad \text{si } t_1 \neq t_2$$

De même, en permutant, d'où les relations :

$$\theta_3^2 = \frac{ab}{cd} \qquad \theta_2^2 = \frac{ac}{bd} \qquad \theta_1^2 = \frac{bc}{ad} \qquad (t_1 \neq t_2 \neq t_3) \qquad (9)$$

Système analogue en changeant θ en t.

Si $t_1 = t_2$, on voit directement que $a = b = 1 + t_1^2$; donc $\theta_1 = \theta_2$ et $\alpha = \beta = 1 + \theta_1^2$. Le quasi-triangle est isocèle et l'égalité $c_1 = c_2$ entraîne $V_{31} = V_{23}$ et réciproquement. A des angles égaux sont opposés des côtés égaux. Les formules précédentes s'écrivent alors :

$$(1 + t_1^2)\,\theta_1 = c\ \theta_3 \quad \text{et} \quad (1 + \theta_1^2)\,t_1 = (1 + 2\,\theta_1\theta_3 - \theta_1^2)\,t_3$$

a) si $t_1 \neq t_3$, il vient aussi : $\theta_1^2 = \frac{c}{d}$ et $\theta_3^2 = \frac{a^2}{cd}$; donc les formules (5) s'appliquent encore.

b) si $t_1 = t_3$, $\theta_1 = \theta_3$ et il vient : $1 + \theta_1^2 = 1 + \theta_1^2$ formule identiquement vérifiée ; le quasi-triangle est équilatéral : ses quasi-côtés et ses angles sont tous égaux. De plus, il coïncide avec son associé.

Les formules (9) donnent dans ce cas des valeurs que l'on peut considérer comme les limites vers lesquelles tendent $\theta_1^2\ \theta_2^2\ \theta_3^2$ quand t tend vers t_3.

Les formules (9) s'appliquent donc dans tous les cas.

D'après ces formules, on peut écrire :

$$\begin{cases} \theta_1\,\theta_2 = \dfrac{c^2}{ab}\,\theta_3^2 = \dfrac{abc^2}{abcd} = \dfrac{c}{d} \\ \theta_2\,\theta_3 = \dfrac{a}{d} \\ \theta_3\,\theta_1 = \dfrac{b}{d} \end{cases} \qquad (10)$$

Inversement du système (10), on déduit (9).

Des systèmes équivalents (9) et (10), on déduit chaque fois des systèmes analogues en permutant θ et t, a et α.

Remarquons qu'un θ ne peut s'annuler que si un des nombres a, b, c est nul ; alors le triangle est dégénéré et les supports des côtés sont confondus.

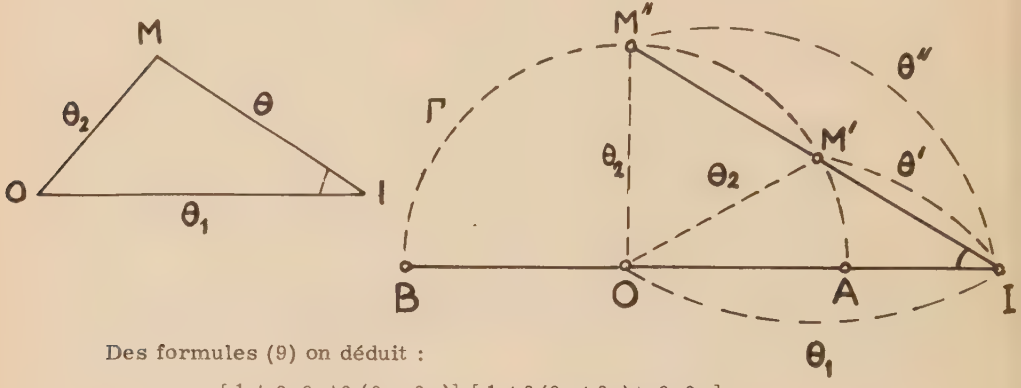
Le système (9) (ou son dual) détermine un élément quand on donne les 3 autres d'espèce différente.

Des systèmes (9) et (10) on déduit la relation remarquable :

$$\frac{1}{1+\Sigma\, t_1 t_2} + \frac{1}{1+\Sigma\, \theta_1\theta_2} = \frac{1}{2} \qquad (11)$$

IX - QUASI-PUISSANCE D'UN CERCLE $\subset \mathcal{C}\mathcal{P}$ PAR RAPPORT A UNE V.S.O. $\subset \mathcal{C}\mathcal{P}$ -

Soit un quasi-triangle de côtés $\theta_1\ \theta_2\ \theta_3$ et t_2 la cotangente de l'angle $\frac{I}{2}$, I opposé à θ_2.



Des formules (9) on déduit :

$$t_2^2 = \frac{[\,1+\theta_1\theta_2+\theta(\theta_1-\theta_2)\,]\,[\,1+\theta(\theta_1+\theta_2)-\theta_1\theta_2\,]}{[\,1+\theta(\theta_2-\theta_1)+\theta_1\theta_2\,]\,[\theta_1\theta_2+\theta(\theta_1+\theta_2)-1\,]}$$

On déduit sans peine l'équation :

$$\theta^2 + \left[\frac{1+\theta_1\theta_2}{\theta_2-\theta_1} + \frac{\theta_1\theta_2-1}{\theta_1+\theta_2}\right]\frac{t^2-1}{t^2+1}\cdot\theta + \frac{\theta_1\theta_2-1}{\theta_1+\theta_2}\cdot\frac{\theta_1\theta_2+1}{\theta_2-\theta_1} = 0$$

ou :

$$\theta^2 + [\,\mathrm{cotg}(V_1-V_2) - \mathrm{cotg}(V_2+V_1)\,]\cos I.\ \theta + \mathrm{cotg}(V_1+V_2).\ \mathrm{cotg}(V_1-V_2) = 0 \qquad (12)$$

L'angle I étant donné ainsi que les côtés OI et OM, θ est déterminé par (12) et il y a 2 solutions.

Ainsi le 3è sommet du quasi-triangle OIM est l'un ou l'autre des 2 cercles M' et M'' de la V.S.O. Γ dont l'un des anaxes est O et dont l'angle rayon correspondant a pour cotangente θ_2. En désignant alors par θ' et θ'' les solutions de (12), il vient :

$$\theta'\theta'' = \mathrm{cotg}\,(V_1+V_2).\ \mathrm{cotg}\,V_1 - V_2\,) \qquad (13)$$

quantité constante quand I varie.

Ce résultat justifie la définition suivante :

Définition :

On appelle quasi-puissance d'un cercle $I \in \mathcal{C}\mathcal{P}$ par rapport à une V.S.O. $\Gamma \subset \mathcal{C}\mathcal{P}$ le produit constant des cotangentes des V-angles du cercle I avec les cercles d'intersection de Γ et d'une V.S.D. $\subset \mathcal{C}\mathcal{P}$ contenant I.

On écrira symboliquement : $p = \overline{IM}.\overline{IM'} = \overline{IA}.\overline{IB}$, les segments désignant les cotangentes des V-angles des quasi-segments correspondants.

Posons :

$$\overline{IA} = \cotg (V_1 - V_2) = \tau_1$$

$$\overline{IB} = \cotg (V_1 + V_2) = \tau_2$$

(12) s'écrit alors :

$$\theta^2 + (\tau_1 + \tau_2) \cos I . \theta + \tau_1 \tau_2 = 0 \qquad (14)$$

X - QUASI-HOMOTHETIE -

K étant un nombre algébrique fixe, posons $T = K\theta$; (14) devient :

$$T^2 + K(\tau_1 + \tau_2) \cos I . T + \tau_1 \tau_2 K^2 = 0 \qquad (15)$$

Sur la V. S. D. IAB définissons les cercles A et B tels que :

$$\overline{IA_1} = K \overline{IA}$$

$$\overline{IB_1} = K \overline{IB}$$

(15) s'écrit alors :

$$T^2 + (\overline{IA_1} + \overline{IB_1}) \cos I . T + \overline{IA_1} . \overline{IB_1} = 0 \qquad (16)$$

C'est l'équation aux T des cercles d'intersection de la V. S. D. IMM' avec la V. S. O. admettant pour cercles quasi-diamétralement opposés A_1 et B_1.

On est conduit ainsi à la définition suivante :

Définition :

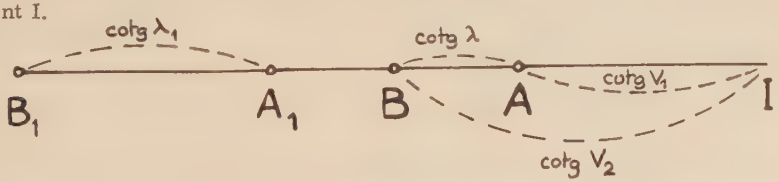
Etant donné un cercle $I \in \mathcal{C}\ \mathcal{T}$ et un nombre algébrique K, on appelle quasi-homothétie de $\mathcal{C}\ \mathcal{T}$ la transformation qui, à tout cercle $M \in \mathcal{C}\ \mathcal{T}$, fait correspondre $M' \in \mathcal{C}\ \mathcal{T}$ de manière que :

1/ M, M', I soient sur une même V. S. D.

2/ Si l'on désigne par θ la cotangente du V-angle de I et M, par T la cotangente du V-angle de I et M', on ait : $T = K\theta$

Propriétés de la quasi-homothétie.

De ce qui précède, il résulte que la transformation change une V-série en une V-série. Les anaxes des 2 V-séries sont sur une même V. S. D. contenant I.



Désignons par λ l'angle superficiel de la cyclide contenant la première V. S. O. et par λ_1 celui de la cyclide contenant la deuxième.

Soient V_1 V_2 V'_1 V'_2 les V-angles respectifs des couples de cercles (I, A) (I, B) (I, A_1) (I, B_1).

On a :

$$\cotg V'_1 = K \cotg V_1$$

$$\cotg V'_2 = K \cotg V_2$$

$$\cotg \lambda_1 = \cotg (V'_2 - V'_1) = \frac{1 + \cotg V'_1 \cotg V'_2}{\cotg V'_1 - \cotg V'_2} = \frac{1 + K^2 \cotg V_1 \cotg V_2}{K(\cotg V_1 - \cotg V_2)}$$

Mais : $\operatorname{cotg} V_1 . \operatorname{cotg} V_2 = p$ est la quasi-puissance de I par rapport à la première série. Donc :

$$\operatorname{cotg} \lambda_1 = \frac{1 + K^2 p}{K(\operatorname{cotg} V_1 - \operatorname{cotg} V_2)}$$

Comme :

$$\operatorname{cotg} \lambda = \frac{1 + p}{\operatorname{cotg} V_1 - \operatorname{cotg} V_2}$$

il vient :

$$\operatorname{cotg} \lambda_1 = \frac{1 + K^2 p}{K (1 + p)} \operatorname{cotg} \lambda$$

Remarques :

1/ Toute V. S. D. contenant I est invariante.

2/ Si $K = -1$ la transformation est une transposition dont le cercle de base est I.

3/ Ne pas croire que les homologues des anaxes de la V-série donnée sont les anaxes de la seconde.

XI - QUASI-INVERSION -

Etant donné un cercle fixe $I \subset \mathcal{C}\mathcal{P}$ et un nombre K, on appelle quasi-inversion une transformation de $\mathcal{C}\mathcal{P}$, qui, à tout cercle $M \subset \mathcal{C}\mathcal{P}$, fait correspondre un cercle $M' \subset \mathcal{C}\mathcal{P}$ tel que :

1/ I, M, M' soient sur une même V. S. D.

2/ θ étant la cotangente du V-angle (algébrique) relatif au quasi-vecteur $\overrightarrow{IM}$, θ' celle de l'angle relatif à $\overrightarrow{IM'}$, on ait : $\theta\theta' = K$

Si $K > 0$, on peut définir une V. S. O. d'anaxes I et $\bar{I}$ dont $\sqrt{K}$ est le quasi-rayon relatif à I, invariante cercle par cercle et qu'on appelle V-série directrice de la quasi-inversion.

Si $K = -1$, $\theta\theta' = -1$, $\operatorname{cotg} V = -\operatorname{tg} V' = \operatorname{cotg}(V' + \frac{\pi}{2})$

$$V - V' = \frac{\pi}{2} + K\pi \qquad (K = 0, -1)$$

La transformation remplace chaque cercle par son conjugué elle est indépendante de cercle I choisi : nous l'appellerons une association : elle conserve toute V. S. D. et remplace toute V. S. O. par une V. S. O. de mêmes anaxes et de mêmes angles rayons.

Nous verrons ultérieurement sa signification conforme.

Soit $\bar{\theta}$ le paramètre du conjugué $\bar{M}$ de M ; on a :

$$\bar{\theta}\,\theta\,\theta' = K\bar{\theta} \qquad \text{or } \bar{\theta}\theta = 1 ;$$

donc :

$$\theta' = -K\bar{\theta}$$

Ainsi, toute quasi-inversion de puissance K est le produit commutatif d'une quasi-homothétie de rapport -K et d'une association.

Le produit de 2 quasi-inversions est une quasi-homothétie.

Utilisant le fait qu'une V. S. D. de $\mathcal{C}\mathcal{P}$ coupe une V. S. O. de $\mathcal{C}\mathcal{P}$ sous le même angle, en tous les points des 2 cercles communs, on démontre aisément que la quasi-inversion conserve les angles (en renversant le sens si on utilise la convention du bilatère orienté) des V-séries de $\mathcal{C}\mathcal{P}$.

Plus généralement, elle conserve les angles que font entre elles 2 surfaces cerclées de $\mathcal{C}^{\mathcal{P}}$ en les divers points de leurs cercles communs, (tout le long d'un cercle commun, l'angle des surfaces est constant).

Toutefois, le V-angle de 2 cercles quelconques de $\mathcal{C}^{\mathcal{P}}$ n'est pas en général conservé, puisqu'une V-série de $\mathcal{C}^{\mathcal{P}}$ est généralement transformée en une V-série d'angle rayon différent (voir la formule antérieurement établie).

Remarque sur la configuration de Morley-Petersen dans $\mathcal{C}^{\mathcal{P}}$.

La configuration de Morley-Petersen, pour un système de 3 cercles 2 à 2 paratactiques et non conjugués, introduit les 3 V.S.D. $\tau'_1\ \tau'_2\ \tau'_3$ complémentaires des 3 V.S.D. $\tau_1\ \tau_2\ \tau_3$ hauteurs du trilatère dont les anneaux-sommets contiennent les 3 cercles et le théorème du même nom exprime que $\tau'_1\ \tau'_2\ \tau'_3$ ont deux cercles $\perp$ communs, qui ne sont autres que les 2 cercles l'anneau G commun aux quasi-hauteurs : $\tau_1\ \tau_2\ \tau_3$.

CHAPITRE III

REPRÉSENTATIONS D'UNE CONGRUENCE PARATACTIQUE

I - LIEU DES TRANSPOSES D'UN POINT PAR RAPPORT AUX CERCLES D'UNE V-SERIE DROITE -

Soit Γ une V. S. D. de $\mathcal{C}\mathcal{P}$, lieu de cercles C_i et soit O un point non situé sur S, sphère principale de $\mathcal{C}\mathcal{P}$. O et l'anneau $\mathcal{A}$ des anaxes de Γ déterminent, si $O \notin \mathcal{A}$, une V. S. D. γ dont la complémentaire γ' est le lieu des cercles $\perp$ à Γ. γ et γ' sont invariantes dans les (C_i), donc le lieu appartient à γ.

Soit O_1 le transposé de O par (C_1) tel que $C_1 \not\subset \Gamma$: O_i transposé de O par (C_i) est transformé de O_1 par l'O $\mathcal{P}$: $(C_1)(C_i)$, dont une base est un anneau arbitraire de Γ' complémentaire de Γ. Alors, quand C_i décrit Γ, $(C_1)(C_i)$ est une O $\mathcal{P}$ continue basée sur cet anneau et O_i décrit le cercle de $\mathcal{C}\mathcal{P}$ contenant O_1. Le lieu trouvé reste évidemment invariable quand O décrit le cercle de $\mathcal{C}\mathcal{P}$ qui le contient.

Si $O \in \mathcal{A}$, le lieu est le cercle de $\mathcal{A}$ ne contenant pas O.

Remarquons que, si la V. S. D. Γ passe par le point O, le lieu est le cercle C'_1 de la V. S. D. complémentaire contenant $O \in C_1 \in \Gamma$.

II - LIEU DES TRANSPOSES D'UN POINT PAR RAPPORT AUX CERCLES D'UNE $\mathcal{C}\mathcal{P}$ -

2 V. S. D. de $\mathcal{C}\mathcal{P}$ ont en commun un anneau, donc leurs cercles images dans la représentation précédente ont en commun 2 points inverses dans (S). Ainsi, les cercles images étant 2 à 2 cosphériques, le lieu cherché est une sphère Σ orthogonale à S et à C_1 en O (remarque précédente). Σ contient donc $\bar{C}_1$; c'est donc la sphère O u $\bar{C}_1$. Σ est aussi l'image de $\mathcal{C}\mathcal{P}$ relativement à l'inverse O' de O dans (S), un même point de Σ étant confondu avec les transposés de O et O' par rapport à 2 cercles conjugués de $\mathcal{C}\mathcal{P}$. Σ est bitangente à toute V-série de $\mathcal{C}\mathcal{P}$ contenant $\bar{C}_1$.

Réciproquement, toute sphère $\sum$ contenant $\bar{C}$ est $\perp$ à C en 2 points inverses par (S) qui déterminent un point O* de l'espace quotient $E^* = E / (S)$ (espace des couples de points homologues dans (S)) $\sum$ peut être considérée comme l'image de $\mathcal{C}\mathcal{P}$ relativement à O*.

Soit une sphère quelconque $\Sigma \perp S$: l'ensemble des cercles $C_1 \perp$ à S et $\perp$ à Σ forme un réseau, le plan X des centres étant celui de $\Sigma \cap S$. Une $\mathcal{C}\mathcal{P}$

quelconque contient un C_1 dont les foyers sont les intersections de X avec les isotropes de base de $\mathcal{C}\,\mathcal{P}$ et Σ est l'image de $\mathcal{C}\,\mathcal{P}$ relativement au point $C_1 \cap \Sigma$ de E^*.

Ainsi, toute sphère $\Sigma \perp$ à S peut être considérée comme sphère de représentation d'une $\mathcal{C}\,\mathcal{P}$ quelconque de sphère principale S.

Il est presque immédiat que la représentation sphérique est un isomorphisme de $\mathcal{C}\,\mathcal{P}$ sur Σ.

III - DISTANCE PARATACTIQUE DE 2 POINTS -

Soient A et B, 2 points donnés : une sphère $\Sigma \perp$ à S, qui les contient, est donc l'image d'une $\mathcal{C}\,\mathcal{P}$ quelconque de S ; soient C_A et C_B les homologues dans $\mathcal{C}\,\mathcal{P}$ de A et B.

On transforme A en B par le produit $(C_A).(C_B)$ de transpositions, qui est équivalent à une opération paratactique, dont le V-angle est le V-angle de C_A et C_B. Cette O. P. est réductible de l'∞^2 manières au produit de 2 R. A. d'angle V, basées sur un anneau quelconque d'une congruence paratactique d'espèce différente de $\mathcal{C}\,\mathcal{P}$, soit $\mathcal{C}\,\mathcal{P}'$, telle que $\mathcal{C}\,\mathcal{P}' \supset C'$ cercle contenant A^* et B^*.

Comme $\mathcal{C}\,\mathcal{P}'$ ne dépend pas du choix de la sphère Σ renfermant A^* et B^*, ni du choix de $\mathcal{C}\,\mathcal{P}$ parmi les $\mathcal{C}\,\mathcal{P}$ de même espèce, on voit que V ne dépend, en définitive, que de A, B, S.

(une inversion dont la sphère directrice contient C' permute, entre elles, les $\mathcal{C}\,\mathcal{P}$ des 2 espèces et conserve la définition de V).

Etudions les propriétés du nombre V attaché à un couple de points A et B, quand on donne sa sphère S de référence.

1/ $V = 0$, si $A = B$

2/ $V_{AB} = V_{BA}$ puisque V est un nombre arithmétique.

3/ Des formules (5) appliquées au quasi-triangle déterminé par 3 cercles de $\mathcal{C}\,\mathcal{P}$ d'images A, B, C, il résulte :

$$\sin (V_{BC} + V_{CA} - V_{AB}) = \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{cotg} \lambda'$$

où V_{AB} désigne le plus grand des angles V; $\frac{C}{2}$ et λ' désignant des angles aigus, le sinus est positif et on a :

$$V_{AB} \leqslant V_{BC} + V_{CA}$$

4/ Si $V = 0$, on a $A = B$ ou $A = \dot{B}$ (inverse de B dans (S))

donc : $A^* = B^*$

Ainsi, le nombre arithmétique V attaché à un couple de points de l'espace E^* satisfait à la définition d'une "distance".

$V_{A^*B^*}$ sera dit la distance "paratactique" des points A^* et B^*.

IV - LIEU DES POINTS A UNE DISTANCE PARATACTIQUE CONSTANTE D'UN POINT FIXE A^* -

Soient M^* et N^*, 2 points du lieu $V_{A^*M^*} = V_{A^*N^*}$ et C, C' les cercles contenant respectivement les couples A^*, M^* et A^*, N^*. C et C' sont cosphériques et s'échangent dans l'une ou l'autre de 2 inversions conservant A^* et S. Dans une telle inversion A^* demeure invariant et N a pour homologue un point M_1 tel que :

$$V_{AM} = V_{AN} = V_{AM_1}$$

M_1 coïncide donc avec M ou $\dot{M}$ inverse de M dans une inversion conservant A, C, S (celle dont la sphère directrice est la sphère orthogonale à S et C contenant A). En transformant alors M et $\dot{M}$ par les inversions dont les sphères directrices forment le réseau dont les points de base sont les éléments de A^*, on voit que le lieu cherché est une sphère de E^* du faisceau à points limites A et $\dot{A}$.

V - COORDONNEES PARATACTIQUES D'UN POINT -

Soient A, B, C, 3 points fixes de E non situés sur S et tels que A^*, B^*, C^* soient distincts.

Par tout point $M^* \in E^*$ et $\notin S$, passe une sphère et une seule de chacun des faisceaux A^*, B^*, C^* et les 3 sphères obtenues sont distinctes. Chacune des sphères peut être considérée comme un lieu de points à distance constante de A^*, B^*, ou C^*. On fait ainsi correspondre à M^* 3 distances x_A, x_B, x_C.

Réciproquement, 3 telles distances déterminent 3 sphères 2 à 2 distinctes, si x_A, x_B, x_C sont respectivement différents de ξ_A ξ_B ξ_C, valeurs déterminant S comme lieu de points à distances données respectivement de A^*, B^*, C^*. Les 3 sphères ont 2 points communs M et M'.

Soit X la sphère $\perp$ à S contenant A, B, C : X appartient aux 3 réseaux conjugués des 3 faisceaux précédents et (X) conservant alors chacune des 3 sphères précédentes, échange M et M'.

Ainsi, à 3 distances $x_A \neq \xi_A$, $x_B \neq \xi_B$, $x_C \neq \xi_C$, correspond un point bien déterminé de l'espace quotient $E^\circ = E/(X)$.

En définitive, tout point $M^\circ \in E^\circ$ tel que $M^\circ \notin S$ est en correspondance biunivoque avec un triplet de nombres arithmétiques respectivement distincts de ξ_A, ξ_B, ξ_C.

Supposons maintenant $M \in S$; soient C_A, C_B, C_C les cercles de base (tracés sur S) des 3 faisceaux A^*, B^*, C^*.

Les x désignant des variables distinctes des ξ, on a le tableau suivant :

Hypothèses	Coordonnées
1/ $M \notin C_A$, $M \notin C_B$, $M \notin C_C$	ξ_A ξ_B ξ_C
2/ $M \notin C_A$, $M \notin C_B$, $M \in C_C$	ξ_A ξ_B x_C
3/ $M \notin C_A$, $M \in C_B$, $M \in C_C$	ξ_A x_B x_C
4/ $M \in C_A$, $M \in C_B$, $M \in C_C$ (M est base d'un réseau)	x_A x_B x_C

Conclusion

La distance paratactique est la métrique d'une géométrie d'espace $E^* = E/(S)$ ayant pour groupe fondamental le groupe anallagmatique conservant S. Un point est repéré par les coordonnées "paratactiques" qu'on vient de définir.

VI - CHAMP COCYCLIQUE (Lagrange, An. EN.S. 1942 et 1945).

On désigne ainsi une famille de cercles $\perp$ à S et 2 à 2 cosphériques sur une sphère X $\perp$ à S. On sait que X peut être considérée comme l'image d'une

$\mathcal{C}\,\mathcal{T}$ de sphère fondamentale S relativement à un point convenablement choisi $O \in X$: aux cercles du champ correspondent alors des V. S. D. de $\mathcal{C}\,\mathcal{T}$ et aux cercles quelconques de X des V. S. O. de $\mathcal{C}\,\mathcal{T}$ ainsi que nous allons le voir.

Les résultats de Lagrange (obtenus d'ailleurs avec une métrique différente de celle adoptée ici) s'interprètent alors immédiatement en propriétés de V-séries de $\mathcal{C}\,\mathcal{T}$ par transfert de structure.

VII - LIEU DES TRANSPOSES D'UN POINT PAR RAPPORT AUX CERCLES D'UNE V. S. O. -

Soient Γ une telle V-série de cercle générateur C_i, C' un cercle de la V-série complémentaire Γ'. On a :

$$(C_i) = (C_i)(C')(C')$$

C_i et C' sont des cercles cosphériques se coupant sous un angle constant $\frac{\theta}{2}$; donc $(C_i)(C')$ est une R. A. d'angle θ basée sur le cycle $\widehat{\gamma}$ qui leur est orthogonal et qui engendre, quand C_i varie, une V. S. D. $\perp$ à Γ le long de C' (V. S. D. contenant C' et les anaxes de Γ).

Si O_1 est le transformé de O (par C') le lieu cherché n'est autre que le lieu des transformés de O_1 par les R. A. d'angle θ basées sur les cycles de la V. S. D. précédente.

La réciproque est exacte et il est équivalent de chercher le lieu d'un point, transposé d'un point fixe par les T. A. basées sur les cercles d'une V. S. O., ou le lieu des homologues du point fixe dans les R. A. d'angle θ donné, basées sur les cercles d'une V. S. D.

Utilisons le au premier point de vue : le lieu appartient d'abord à la sphère Σ image de la $\mathcal{C}\,\mathcal{T}$ contenant la V. S. O. relativement au point O. Une inversion de pôle O, qui conserve S, transforme Σ en un plan P $\perp$ à S et $\mathcal{C}\,\mathcal{T}$ en une $\mathcal{C}\,\mathcal{T}'$ de sphère fondamentale S et de système différent. Le lieu cherché est alors transformé en le lieu des centres des cercles de $\mathcal{C}\,\mathcal{T}'$ appartenant à la V. S. O. transformée Γ'.

Ce lieu est la section par P de la semi-quadrique, lieu des axes des cercles de Γ'. Or, cette section est un cercle : en effet, P est $\perp$ à la droite de $\mathcal{C}\,\mathcal{T}'$ transformée du cercle de $\mathcal{C}\,\mathcal{T}'$ qui contient O et les isotropes de $\mathcal{C}\,\mathcal{T}'$ rencontrent P aux points cycliques.

Le lieu primitif est donc un cercle de Σ, orthogonal à S si, et seulement si, la V-série Γ est droite.

Le raisonnement montre, en outre, que les cercles d'une V-série de $\mathcal{C}\,\mathcal{T}$ sont centrés sur un cercle d'un plan diamétral P de S et ce cercle est orthogonal à $S \cap P$ si, et seulement si la V-série est droite.

Il est immédiat que P n'est autre que le lieu des centres de tous les cercles de $\mathcal{C}\,\mathcal{T}$: c'est une sphère particulière de représentation, dont les cercles sont les images des V-séries de $\mathcal{C}\,\mathcal{T}$ admettant pour semi-quadriques associées les semi-quadriques contenant ces cercles et les isotropes de base de $\mathcal{C}\,\mathcal{T}$.

Remarque :

Puisque 2 V-séries de $\mathcal{C}\,\mathcal{T}$ ont toujours 2 cercles communs, les lieux des transformés d'un point fixe par les R. A. d'angle θ basées sur ces 2 V-séries, sont 2 cercles ayant 2 points communs. On déduit que le lieu des transformés d'un point fixe par les R. A. d'angle donné θ, basées sur les cercles d'une $\mathcal{C}\,\mathcal{T}$, est une sphère contenant le point et évidemment $\perp$ à S,

puisque transposée d'une sphère de représentation par une T.A. telle que (C') où C' $\perp$ S.

VIII - LIEU DES TRANSFORMES D'UN POINT PAR LES R.A. D'ANGLE θ, BASEES SUR LES CERCLES D'UNE V.S.O. DE $\mathcal{C}^2$ -

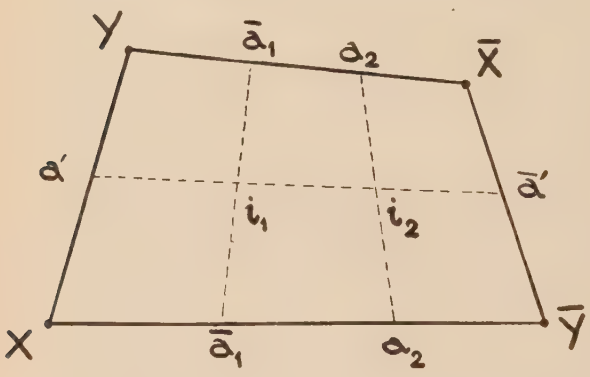
Soit Γ une V. S. O. de cercle générateur C_i ; C' désigne un cercle fixe de la V.S.O. complémentaire Γ'. Soit Δ' une V. S. D. coupant Γ' selon C' sous un angle α tel que, si γ_i désigne le cercle de Δ contenant $C_i \cap C'$, l'angle des sphères $(C_i \cup \gamma_i) = \sigma$ et $(C_i \cup C') = \sigma'$ soit $\frac{\theta}{2}$ (α se calcule par la trigonométrie sphérique). Soit σ'' la sphère $(C' \cup \gamma_i)$. On a :

$$(C_i)_\theta = (\sigma').(\sigma) = (\sigma').(\sigma'').(\sigma'').(\sigma)$$

Mais $(\sigma'').(\sigma)$ est une R.A. fixe de base C' et d'angle 2α et $(\sigma').(\sigma'')$ une R.A. relative à un cercle γ_i d'une V.S.D., d'angle indépendant de i.

En définitive, à une R.A. fixe près, le problème est ramené au précédent et le lieu est encore un cercle appartenant évidemment à la sphère définie dans la remarque précédente.

IX - INTERPRETATION HOMOGRAPHIQUE DU V-ANGLE -



Soit Q la quadrique associée à une cyclide de Dupin G de sphère principale S; X, Y, $\bar{X}$, $\bar{Y}$ sont les sommets du quadrilatère gauche $Q \cap S$, $X\bar{Y}$ et $Y\bar{X}$ des couples de génératrices de même système, les barres indiquant les conjugués des éléments correspondants si S est imaginaire, ou les symétriques des conjugués par rapport à un plan diamétral si S est réelle. En effet, les 4 droites sont 2 à 2 imaginaires conjuguées : si S est réelle, ce sont les droites conjuguées qui sont incidentes. X et $\bar{X}$ par ex. sont réels, tandis que Y et $\bar{Y}$ sont imaginaires conjugués.

Si S est imaginaire, les droites conjuguées ne sont pas incidentes.

Soient C_1 et C_2, 2 cercles d'une même V-série Γ de G, C' un cercle de la V-série complémentaire. Désignons par a_1 et $\bar{a}_1$ les foyers de C_1, par a_2 et $\bar{a}_2$ ceux de C_2, a' et $\bar{a}'$ ceux de C'.

Soient :

$$a_1, a_2 \in Y\bar{X} \quad ; \quad \bar{a}_1, \bar{a}_2 \in X\bar{Y}$$

$$a' \in XY \quad ; \quad \bar{a}' \in \bar{X}\bar{Y}$$

Les couples C_1, C' et C_2, C' sont respectivement cosphériques, donc $a_1\bar{a}_1$ et $a_2\bar{a}_2$ rencontrent $a'\bar{a}'$ en i_1 et i_2.

Le rapport anharmonique $(a'\bar{a}'i_1\,i_2)$ des 4 points alignés de Q, est égal au rapport anharmonique des 4 plans tangents qui coupent $X\bar{X}$ respectivement en X, $\bar{X}$ et 2 points I_1 et I_2 tels que $I_1 = a_1a' \cap \bar{a}_1\bar{a}'$ et $I_2 = a_2a' \cap \bar{a}_2\bar{a}'$.

Mais I_1 et I_2 sont centres de sphères S_1 et S_2 contenant l'anaxe U de foyers X et $\bar{X}$ et telles que (S_1) et (S_2) échangent respectivement C_1 et C', C' et C_2.

$(S_1)(S_2)$ étant une R. A. d'angle double de l'angle de S_1 et S_2, on voit que l'angle de S_1 et S_2 est le V-angle des 2 cercles dans le cas où G est équilatère.

Ainsi, $\mathcal{R}$ = $(I_1 I_2 X\bar{X})$ = rapport anharmonique des axes de C_1 C_2 et des isotropes de même système = rapport anharmonique des centres de C_1 C_2 et des points d'intersection de la section de Q par le plan central de $\mathcal{C}\mathcal{T}$ avec le cercle σ de section de S par ce plan.

$\mathcal{R}$ est donc le rapport anharmonique de 4 points d'un cercle et si Q est autopolaire (ou G équilatère) on a :

$$\mathcal{R} = e^{2iV} \qquad \text{ou} \qquad V = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \mathcal{R}$$

X - RETOUR A LA REPRESENTATION SPHERIQUE D'UNE CONGRUENCE PARATACTIQUE -

Une telle représentation est anallagmatiquement équivalente à une représentation sur le plan central de $\mathcal{C}\mathcal{T}$.

Soit Σ une sphère de représentation ; 2 V-cercles de $\mathcal{C}\mathcal{T}$ ont pour images sur Σ 2 points par lesquels passe un cercle $u \perp$ au cercle $\sigma = S \perp \Sigma$ et les 2 points $u \cap \sigma$ forment avec les 2 points donnés, une division concyclique de rapport anharmonique e^{2iV}.

Soit ω $\bar{\omega}$ un couple de points homologues par (S) situés sur Σ définissant un faisceau sphérique $T \in \Sigma$ et dont tous les cercles sont par suite $\perp$ à σ

Soit un cercle $\tau \in T$, et soient α et β les points $\sigma \cap \tau$. A ω on fait correspondre un point ω' tel que :

$$(\omega, \omega', \alpha, \beta) = e^{2iV}$$

L'ensemble des inversions dont les sphères directrices ont pour traces sur Σ les cercles de T et qui laissent Σ invariante transforme τ en l'ensemble des cercles de T, α et β en des points de σ ; ω demeure invariant et le lieu de ω' est un cercle du faisceau à points limites ω et $\bar{\omega}$, image d'une V-série de $\mathcal{C}\mathcal{T}$, d'angle rayon V, dont les anaxes ont pour images ω et $\bar{\omega}$ (car l'inversion conserve le rapport anharmonique).

Ainsi, chaque cercle image d'une V-série $\Gamma \in \mathcal{C}\mathcal{T}$ dont les anaxes ont pour images ω et $\bar{\omega}$ appartient au faisceau à points limites ω et $\bar{\omega}$ dont σ fait partie. Les cercles du faisceau conjugué à points de base ω et $\bar{\omega}$ sont les images des V. S. D. de $\mathcal{C}\mathcal{T}$ contenant les anaxes de Γ.

ω et $\bar{\omega}$ seront appelés "quasi-centres" du cercle image de Γ et les cercles du faisceau à points de base ω et $\bar{\omega}$ sont les quasi-droites (ou "droites") d'une géométrie cayleyenne d'absolu σ ; si une telle droite coupe σ en α et β et l'image de Γ en m, m', $\widehat{\omega m}$ et $\widehat{\bar{\omega} m}$ sont appelés "quasi-rayons" du cercle image ; leurs mesures seront celles des "quasi-rayons" de Γ : V et $V + \frac{\pi}{2}$.

Soient alors ω et ω' ($\bar{\omega}' \neq \omega$), 2 points de Σ, δ la "droite" unique qui les contient ; 2 cercles $\perp$ à σ et $\perp$ à δ qui contiennent respectivement ω et ω' sont des "droites" se coupant en des points inverses dans (σ). Une inversion ayant pour pôle un de ces points permet de montrer qu'ils se coupent sous l'angle 2 V, angle des V. S. D. dont ils sont les images.

En définitive, on a montré que la représentation sphérique de $\mathcal{C}\mathcal{T}$ était isométrique au sens de la distance V et conforme en ce sens que l'angle de 2 V. S. D. de $\mathcal{C}\mathcal{T}$, donc de 2 surfaces de $\mathcal{C}\mathcal{T}$, est conservé pour les images.

XI - TRANSMUEE DE LA QUASI-INVERSION DANS LA REPRESENTATION -

Par transport de structure, on est conduit à la transformation définie ainsi sur la sphère de représentation Σ.

O étant un point fixe, on considère la quasi-droite OM ($M \neq \bar{O}$) ainsi que celles orthogonales à la précédente (donc contenant ses quasi-centres) passant respectivement par O et M et se coupant sous l'angle V.

Au point M, on fait correspondre M', intersection de la quasi-droite OM avec la quasi-droite orthogonale qui coupe la quasi-droite orthogonale en O à OM sous un angle V' tel que :

$$\cotg \frac{V}{2} \cdot \cotg \frac{V'}{2} = K \text{ nombre algébrique donné}$$

Une inversion de pôle $\bar{O}$ montre que cette transformation n'est autre que la trace sphérique d'une inversion. En effet :

- la sphère Σ est transformée en un plan
- le cercle σ en un cercle σ_o de ce plan
- une quasi-droite issue de O en un diamètre de σ_o
- les quasi-droites $\perp$ en O, M, M' à la quasi-droite OMM' sont transformées prespectivement en la droite $\Delta \perp$ en O_o transformé de O au rayon $O_o M_o M_o'$ et en 2 cercles invariants par σ, contenant respectivement M_o, M_o' et coupant Δ sous les angles $\frac{V}{2}$ et $\frac{V'}{2}$.

La constance du produit $\cotg \frac{V}{2} \cdot \cotg \frac{V'}{2}$ prouve que la transmuée de la transformation étudiée par l'inversion ($\bar{O}$) n'est autre qu'une inversion de pôle O_o. C'est donc que la transformation est elle-même une inversion, dont le cercle directeur est d'ailleurs un cercle du faisceau à points limites O et $\bar{O}$ (ses quasi-centres, $\sqrt{K}$ étant son quasi-rayon).

Remarquons que l'on vient de trouver pour l'inversion une généralisation anallagmatique de sa définition par rayons vecteurs réciproques : une inversion étant donnée par son cercle directeur c, on fait choix dans le plan d'un quasi-pôle arbitraire $O \notin c$, puis dans le faisceau défini par O et c, d'un absolu σ, ce qui détermine la valeur $\sqrt{K}$ du quasi-rayon associé à O (valeur réelle ou imaginaire pure).

De plus, on déduit que l'étude géométrique d'une $\mathcal{C}\mathcal{R}$ faite antérieurement donne, par transfert, les formules et propriétés invariantes pour le groupe de la géométrie hermitienne elliptique d'absolu $\Sigma \cap S$.

XII - "CHAINE DE STAUDT" ASSOCIEE A UNE V-SERIE DE $\mathcal{C}\mathcal{R}$ -

Soit X une isotrope de base de $\mathcal{C}\mathcal{R}$: par tout point de X passe une droite unique D de la congruence linéaire C. L. d'isotropes X et $\bar{X}$. Pour que 4 $D_i \subset \mathcal{C}$ (i = 1., 2, 3, 4) appartiennent à une même semi-quadrique, il faut et il suffit que le support anharmonique des 4 points $D_i \cap X$ soit réel. Alors, sur un plan de Cauchy P de représentation de X par l'application composée :

points de X $\longrightarrow$ paramètres $\longrightarrow$ affixes dans P

les 4 points images appartiennent à un même cercle dit "chaîne cyclique de Staudt".

Précisons ce résultat :

L'équation d'une sphère S semi-réelle à 2 types réduits possibles :

1/ $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$ si elle est réelle

2/ $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$ en cas contraire

Dans le cas I, un système de paramètres de l'extension complexe de S est :

$$\lambda = \frac{x + iy}{z + t} = \frac{- z + t}{x - iy}, \qquad \mu = \frac{x + iy}{z - t} = - \frac{t + z}{x - iy}$$

Soit f(x, y, z, t) un point de S ; le symétrique $\bar{f}$ du conjugué de f par rapport à xoy pour paramètres :

$$\lambda' = \frac{- \bar{z} - \bar{t}}{\bar{x} - i\bar{y}} = \frac{1}{\bar{\mu}} \qquad \text{et} \qquad \mu' = \frac{\bar{x} + i\bar{y}}{- \bar{z} + \bar{t}} = \frac{1}{\bar{\lambda}}$$

Dans le cas II, on obtient :

$$\lambda = \frac{x + iy}{iz + t} = \frac{iz - t}{x - iy}, \qquad \mu = \frac{x + iy}{iz - t} = \frac{iz + t}{x - iy}$$

Le conjugué $\bar{f}$ de f a pour paramètres :

$$\lambda' = \frac{\bar{x} + i\bar{y}}{i\bar{z} + \bar{t}} = \frac{- i\bar{z} - \bar{t}}{\bar{x} + i\bar{y}} = - \frac{1}{\bar{\lambda}} \quad \text{et} \quad \mu' = - \frac{1}{\bar{\mu}}$$

Supposons alors que l'on choisisse le plan xoy pour plan fondamental de $\mathcal{C}\mathcal{R}$ et que les équations des isotropes de base de $\mathcal{C}\mathcal{R}$ soient respectivement

$$\left.\begin{array}{l} X : x + iy = z + it = 0 \\ \bar{X} : x - iy = z - it = 0 \end{array}\right\} \quad \text{si S est imaginaire}$$

et

$$\left.\begin{array}{l} X : x + iy = z + t = 0 \\ \bar{X} : x - iy = z - t = 0 \end{array}\right\} \quad \text{si S est réelle}$$

$f \in X$ et $\bar{f} \in \bar{X}$ ayant les significations précédentes, soit D la droite $f\bar{f}'$; D se projette sur xoy suivant une droite d qui, dans les cas I ou II, est réelle et qui joint les projections conjuguées de ces 2 points, dont l'une a pour coordonnées :

$$\alpha = u + iv, \qquad \beta = \alpha\, i, \qquad z = 0$$

Si $x \cos \varphi + y \sin \varphi = p$ est l'équation de d, on a :

$$\alpha (\cos \varphi + i \sin \varphi) = p$$

D'où :

$$\alpha = p\, e^{-i\varphi}, \quad \beta = pi\, e^{-i\varphi}$$

Les coordonnées de $D \cap xoy = m$ sont donc :

$$p \cos \varphi \qquad \text{et } p \sin \varphi$$

puisque m est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur d.

Ainsi, $\bar{\alpha} = p\, e^{i\varphi}$ est l'affixe de m dans le plan de Cauchy, d'axes xoy, confondu avec P et peut être choisi pour paramètre de D.

Quand D décrit une semi-quadrique Q de $\mathcal{C}$, m décrit un cercle (car xoy est plan de section cyclique pour Q) qui n'est autre que la chaîne cyclique image de Q dans le plan P identifié au plan de Cauchy considéré.

Ce cercle est aussi l'image de la V-série Γ de $\mathcal{C}\mathcal{R}$ qui admet Q pour semi-quadrique associée, quand on représente $\mathcal{C}\mathcal{R}$ sur P.

D' étant l'homologue de D dans la polarité S, il est immédiat que le paramètre $\bar{\alpha}'$ de D vérifie :

$$\bar{\alpha}' \alpha = \varepsilon \text{ avec } \begin{cases} \varepsilon = +1 \text{ si S est réelle} \\ \varepsilon = -1 \text{ si S est semi-réelle} \end{cases}$$

(le module du rayon étant choisi pour unité de longueur).

En effet, à des droites réciproques telles que D et D', correspondent dans P des points images (leurs traces) inverses par (S). Ainsi, à un anneau de $\mathcal{C}\mathcal{R}$, correspond un couple de points inverses par (S).

En résumé, on a établi des correspondances biunivoques entre les éléments des ensembles suivants :

cercles de $\mathcal{C}\mathcal{R}$, droites de $\mathcal{C}$, traces de ces droites sur P, foyers des cercles de $\mathcal{C}\mathcal{R}$ sur X droite de base de $\mathcal{C}\mathcal{R}$, affixes des foyers sur le plan complexe image de X.

Les transformations sur les cercles de $\mathcal{C}\mathcal{R}$ se traduisent par des relations entre paramètres complexes de X, i.e. par des transformations sur le plan complexe image.

En particulier, une quasi-inversion dans $\mathcal{C}\mathcal{R}$ qui a pour image dans P une inversion, se traduit par une antiinvolution, à chaîne de points doubles, du type : $\alpha' = \bar{\alpha}(\alpha)$.

On montrera ultérieurement la possibilité d'immerger la quasi-inversion dans une transformation ponctuelle continue de l'espace E, ce qui nous conduira à étendre le groupe conforme.

Remarque :

Il est facile, à la faveur de cette représentation, de traduire tous les théorèmes du chapitre précédent. On obtient notamment une interprétation de la dualité qui, dans une $\mathcal{C}\mathcal{R}$, associe l'anneau des anaxes à toute V.S.D. : ici, c'est la dualité qui, à tout cercle, orthogonal à σ associe les quasi-centres.

CHAPITRE IV

UN CARACTÈRE DU GROUPE CONFORME

I - REPRESENTATION D'UNE SPHERE SUR LE PRODUIT DIRECT DE 2 PLANS DE CAUCHY -

On sait que tout point d'une sphère S d'équation à coefficients réels est l'intersection de 2 isotropes de systèmes différents, de paramètres complexes λ, μ, affixes des points $\dot{\lambda}$, $\dot{\mu}$ de 2 plans de Cauchy π et π'.

Réciproquement, à un tel couple $(\dot{\lambda}, \dot{\mu})$ correspond un point de S et un seul.

En résumé, du point de vue ponctuel, S est en correspondance biunivoque avec le produit direct des plans π et π' ; on conviendra d'écrire :

$$\Phi \simeq \pi \times \pi'$$

On peut, pour la commodité, supposer les plans π et π' canoniquement identifiés et rapportés à la même origine O ($\lambda = 0$, $\mu = 0$), en sorte que : $\lambda = \mu$ entraîne $\dot{\lambda}$ confondu avec $\dot{\mu}$ et réciproquement.

Les absolus des 2 plans (au sens de la géométrie cayleyenne) s'identifient alors à un même cercle σ de centre O de même rayon que S : R = 1 ou R = i (pour un choix convenable de l'unité de longueur).

Un cercle réel, ou semi-réel, invariant par S est caractérisé de façon unique par la donnée d'un couple de paramètres déterminant sur S l'un des foyers :

$$(\lambda, \mu) \quad \text{ou} \quad \left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, -\frac{1}{\bar{\mu}}\right) \quad \text{si } R = i$$

$$(\lambda, \mu) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{\bar{\mu}}, \frac{1}{\bar{\lambda}}\right) \quad \text{si } R = 1$$

(voir chapitre précédent)

En résumé, à une même transformation T de l'espace $\mathfrak{E}$ des cercles invariants par (S), correspond un couple ordonné $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ de transformations de π et π' déterminées simultanément à une transmutation près par (σ), combinée en outre avec une permutation P des 2 plans π et π' dans le cas où R = 1 ; écriture $T \simeq (\mathcal{C}, \mathcal{C}')$.

σ ou σ P déterminent dans $\pi \times \pi'$ une relation d'équivalence et l'espace quotient de $\pi \times \pi'$ par cette relation sera désigné par Φ_o.

2 cercles conjugués ont pour images sur Φ_o des couples tels que :

$$(\lambda, \mu) \quad \text{et} \quad (-\frac{1}{\lambda}, \mu) \qquad \text{si } R = i$$

$$(\frac{1}{\mu}, \lambda) \quad \text{et} \quad (\lambda, \mu) \qquad \text{si } R = 1$$

Du chapitre III, on déduit que l'image dans Φ_o d'une V-série de la $\mathcal{C}\mathcal{P}$, dont une isotrope de base est λ, est le couple constitué par :

un point $\dot{\lambda} \in \pi$
un cercle $c \in \pi'$

dont un quasi-centre $\dot{\mu}$ est l'image d'un des anaxes de la V-série : les quasi-rayons du cercle image sont égaux à ceux de la V-série.

Position du problème.

On se propose de déterminer les transformations T de l'espace $\mathcal{E}$ des cercles invariants par (S), qui induisent une transformation ponctuelle t de l'espace $E^* = E/(S)$; en d'autres termes, il faut et suffit que toute famille de $\mathcal{E}$ contenant un point M^* de E soit transformée en une autre famille contenant un point M'^* de E^* dit homologue de M par t. (A priori, les T forment un groupe).

Structure nécessaire de l'image ($\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$) de T sur Φ -

2 cercles de $\mathcal{E}$ sont cosphériques si, et seulement si, leurs axes sont coplanaires. Toute T correspond ainsi de façon biunivoque à une transformation θ de l'espace réglé, qui induit une transformation homographique tangentielle θ de E.

Or θ laisse S invariante et transforme toute quadrique Q en une quadrique Q', i.e. : $Q \cap S$ en $Q' \cap S$. Si $Q \cap S$ est un quadrilatère isotrope, il en est de même de $Q' \cap S$. Donc T conserve la parataxie : les cercles d'une $\mathcal{C}\mathcal{P}$ dont une isotrope de base a pour paramètre λ, se transforment en les cercles d'une $\mathcal{C}\mathcal{P}$ de même espèce ou d'espèce différente.

Ainsi, à P près, $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$) opère sur π (resp. π') seul. T devant conserver parataxie et cosphéricité transforme nécessairement une cyclide de Dupin de sphère principale S en une autre cyclide de Dupin de même sphère principale, donc toute V-série en une V-série : l'image d'une V-série dans π (resp. π') est un cercle, d'ailleurs invariant par (σ) si la V-série est droite.

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont nécessairement des transformations circulaires.

Lemme fondamental.

Pour que 2 cercles distincts C_1 et C_2 de $\mathcal{E}$ soient cosphériques, il faut et suffit :

ou 1/ que $\lambda_2 = \bar{\mu}_1^{-1}$ ou $\mu_2 = \bar{\lambda}_1^{-1}$ avec R = 1, auquel cas les cercles sont tangents (ch. V).

ou 2/ que, λ_1, μ_1 étant les paramètres sur S d'un foyer d'un cercle et λ_2, μ_2 ceux d'un foyer d'un second (avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\mu_1 \neq \mu_2$, les cercles appartiennent à une même cyclide de Dupin dont un anaxe a pour image sur Φ le couple $\dot{\lambda}_1, \dot{\mu}_2$. Cette cyclide a pour images respectives sur π et π', 2 cercles, images de ses séries de Villarceau :

l'un de quasi-centre $\dot{\lambda}_1$ contenant $\dot{\lambda}_2$
l'autre " $\dot{\mu}_1$ " $\dot{\mu}_2$

Ils ont mêmes quasi-rayons : $\dot{\lambda}_1 \dot{\lambda}_2$ et $\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2$ sont égaux au sens cayleyen.

Pour que 2 cercles distincts, d'images $(\dot{\lambda}_1, \dot{\mu}_1)$ et $(\dot{\lambda}_2, \dot{\mu}_2)$ soient cosphériques, il faut et suffit que les quasi-segments $\dot{\lambda}_1 \dot{\lambda}_2$ et $\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2$ soient égaux.

II - CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE POUR $\mathcal{C}$ ET $\mathcal{C}'$ -

Pour que $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ soit image induite d'une transformation T, il faut et suffit que les homologues des quasi-segments égaux $\dot{\lambda}_1 \dot{\lambda}_2$ et $\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2$ par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ respectivement soient 2 quasi-segments égaux, i. e. que :

$$\mathcal{C}(\dot{\lambda}_1 \dot{\lambda}_2) = \mathcal{C}'(\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2)$$

Si $\dot{\nu}_1$, $\dot{\nu}_2$ est un autre couple de π' tel que :

$$\dot{\lambda}_1 \dot{\lambda}_2 = \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 = \dot{\nu}_1 \dot{\nu}_2$$

on doit avoir :

$$\mathcal{C}(\dot{\lambda}_1 \dot{\lambda}_2) = \mathcal{C}'(\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2) = \mathcal{C}'(\dot{\nu}_1 \dot{\nu}_2)$$

Il existe alors 2 opérations ω et ω', déplacements cayleyens de π et π', tels que :

$$\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 = \omega(\dot{\nu}_1 \dot{\nu}_2)$$

$$\mathcal{C}'(\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2) = \omega' \mathcal{C}'(\dot{\nu}_1 \dot{\nu}_2)$$

D'où :

$$\mathcal{C}' \omega = \omega' \mathcal{C}' \quad , \text{ i. e. : } \omega = \mathcal{C}'^{-1} \omega' \mathcal{C}'$$

$$\text{ou : } \omega \mathcal{C}'^{-1} \omega'^{-1} = \mathcal{C}'^{-1}$$

Posons :

$$\sigma' = \mathcal{C}'^{-1}(\sigma) \quad \text{(homologue de l'absolu par } \mathcal{C}'^{-1})$$

On a : $\omega \mathcal{C}'^{-1} \omega'^{-1}(\sigma) = \mathcal{C}'^{-1}(\sigma) = \sigma'$

Or, $\omega'^{-1}(\sigma) = \sigma$ (car ω' est un déplacement)

D'où : $\omega \mathcal{C}'^{-1}(\sigma) = \sigma'$

i. e. : $\omega(\sigma') = \sigma'$

ω désignant un élément quelconque du groupe fondamental conservant le cercle σ', on déduit que σ' s'identifie à σ.

THEOREME -

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des opérations circulaires conservant σ.

Réciproque évidente.

III - CARACTERE DU GROUPE CONFORME -

Dans π et π' une quasi-distance s'interprète comme le quasi-rayon d'une cyclide de sphère fondamentale S et l'angle "superficiel" d'une cyclide de Dupin est le double d'un quasi-rayon. On déduit alors facilement le théorème suivant :

THEOREME :

Toute transformation de l'espace des cercles qui conserve la cosphéricité induit une opération conforme T de l'espace ponctuel.

La condition est nécessaire et suffisante.

IV - IMAGE DE T SUR Φ_0 -

A l'application canonique près P de π sur π', $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ appartiennent au même groupe fondamental G conservant σ. Il existe donc $U \in G$ telle que :

$\mathcal{C}' = \mathcal{C} . U$

(resp. $U_1 \in G$ telle que : $\mathcal{C}' = U_1 \mathcal{C}$)

Dans la suite, $\mathcal{J}$ désigne la transformation identique.

Posons :

$t \simeq (\mathcal{C}, \mathcal{C})$ (t étant une transformation T particulière)

La transformation : $t' \simeq (\mathcal{J}, U)$ est aussi une transformation T.

Il est clair que :

$$T \simeq (\mathcal{C}, \mathcal{C}') = (\mathcal{C}, \mathcal{C} U) = (\mathcal{C}, \mathcal{C})(\mathcal{J}, U)$$

Donc $T = t . t'$

Mais, $\mathcal{C}$ est-elle même réductible à un produit d'anti-involutions conservant σ (l'absolu), en sorte que toute opération conforme qui conserve S est le produit d'opérations conformes ayant pour images dans Φ_0 des couples du type :

$$(\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{A}}) , \quad (\mathcal{J}, \overline{\mathcal{A}}) , \quad (P, P)$$

$\mathcal{A}$ antiinvolution conservant σ

P application de π sur π' (ou échange de λ , μ)

On se propose de déterminer la signification géométrique de ces opérations conformes élémentaires.

V - OPERATIONS PARATACTIQUES D'ANGLE $\frac{\pi}{2}$ -

Soit OP $(\frac{\pi}{2})$ une telle opération : la $\mathcal{C}\mathcal{T}$ de base à des isotropes de paramètres :

$$\mu_1 \text{ et } \varepsilon \bar{\mu}_1^{-1}$$

Tous les cercles de cette $\mathcal{C}\mathcal{T}$ sont invariants dans OP $(\frac{\pi}{2})$ qui induit donc dans π la transformation identique $\mathcal{J}$. Chaque cercle d'une V. S. D.: V',d'isotropes de paramètres : λ et $\varepsilon \bar{\lambda}^{-1}$ et d'anaxes dans $\mathcal{C}\mathcal{T}$ est transformé en son "conjugué" également sur V'.

Dans π', l'image de V' est un cercle c', orthogonal à σ, invariant par l'image $\mathcal{C}'$ de l'OP $(\frac{\pi}{2})$, chacun de ses points étant remplacé par son inverse dans (σ).

Il est alors immédiat que toute V. S. D. $\perp$ à V' selon un anneau commun , et contenant par suite les anaxes de V', demeure invariante par OP $(\frac{\pi}{2})$. Toute V. S. O. d'anaxes sur V' est alors transformée en une V. S. O. de mêmes anaxes, contenant les conjugués des cercles de la V. S. O. précédente.

En passant aux images dans π', on voit que chaque cercle du faisceau admettant pour points de base les quasi-centres de c', est globalement invariant dans la transformation induite de OP $(\frac{\pi}{2})$; chaque cercle, dont les quasi-centres sont 2 points de c' homologues dans (σ), est transformé en son inverse dans (σ).

Dans π', l'image induite de OP $(\frac{\pi}{2})$ est donc le produit commutatif de l'antiinvolution $\overline{\mathcal{A}}_0$, engendrée par (σ), et de l'antiinvolution $\overline{\mathcal{A}}$ engendrée par l'inversion de cercle directeur (c').

Interprétons $\overline{\mathfrak{A}}_o$: on vient de prouver que tout cercle d'une V. S. D. est remplacé par son conjugué dans une OP $(\frac{\pi}{2})$ basée sur des anaxes. Si la semi-quadrique associée à la V. S. D. est une P. H. E., les anaxes se composent d'un cercle concentrique à S, invariant par (S) et de l'axe de ce cercle ; les images sur π' de ces éléments sont respectivement :

- une droite orthogonale à l'absolu σ
- le centre de σ
- le point $z = \infty$ de π'

} quasi-centres de la droite

Toutes les V. S. D. d'une même $\mathcal{C}\mathcal{R}$, à P. H. E. associés, ont donc les mêmes anaxes et ces anaxes sont communs à toutes ces V. S. D. Désignons par A_o l'anneau qu'ils constituent et par OP_o $(\frac{\pi}{2})$ une opération paratactique basée sur cet anneau et conservant les isotropes de paramètres λ et $\frac{\varepsilon}{\lambda}$:

OP_o $(\frac{\pi}{2})$ remplace chaque cercle invariant dans (S) par son conjugué

(même résultat en renversant le sens d'un des cycles de A_o)

En définitive, il existe 2 OP_o $(\frac{\pi}{2})$ d'images respectives sur Φ :

$$(\mathcal{J}, \overline{\mathfrak{A}}_o) \quad \text{et} \quad (\overline{\mathfrak{A}}_o, \mathcal{J})$$

Elles engendrent dans E^* une même opération A qu'on nomme "association" et qui remplace chaque cercle invariant par (S) par son conjugué (on étend ainsi la transformation déjà définie dans une $\mathcal{C}\mathcal{R}$).

VI - ETUDE DE $T \simeq (\mathcal{J}, \overline{\mathfrak{A}})$ -

On a : $T \simeq (\mathcal{J}, \overline{\mathfrak{A}}) = (\mathcal{J}, \overline{\mathfrak{A}}_o . \overline{\mathfrak{A}}_o . \overline{\mathfrak{A}})$ car $\overline{\mathfrak{A}}_o^2 = \mathcal{J}$

Mais $(\mathcal{J}, \overline{\mathfrak{A}}_o \overline{\mathfrak{A}})$ est une OP $(\frac{\pi}{2})$, ainsi qu'il a été dit, donc :

$$T = A.\ OP\ (\tfrac{\pi}{2})$$

THEOREME :

$(\mathcal{J}, \overline{\mathfrak{A}})$ induit dans l'espace ponctuel une transformation conforme, produit d'une association par une OP d'angle $\frac{\pi}{2}$, conservant les isotropes $\lambda, \frac{\varepsilon}{\lambda}$.

Même théorème pour $(\overline{\mathfrak{A}}, \mathcal{J})$ en remplaçant λ par μ.

VII - PRODUIT DE 2 TRANSFORMATIONS DU TYPE PRECEDENT -

Soit $T = T_1 T_2$ tel que : $T_1 \simeq (\mathcal{J}, \overline{\mathfrak{A}}_1)$

: $T_2 \simeq (\mathcal{J}, \overline{\mathfrak{A}}_2)$

On a : $T \simeq (\mathcal{J}, \overline{\mathfrak{A}}_1 \overline{\mathfrak{A}}_2)$

Soit $\frac{\theta}{2}$ l'angle des cercles directeurs des inversions engendrées par $\overline{\mathfrak{A}}_1$ et $\overline{\mathfrak{A}}_2$: $\overline{\mathfrak{A}}_1 \overline{\mathfrak{A}}_2$ détermine une R. A. d'angle θ.

D'où, en interprétant dans l'espace :

THEOREME :

T est une O. P. d'angle θ conservant toute isotrope du système λ et basée sur l'anneau dont l'image sur Φ est le couple commun aux cercles directeurs des 2 inversions engendrées par $\overline{\mathfrak{A}}_1$ et $\overline{\mathfrak{A}}_2$.

Remarque

On peut aussi écrire :

$$T = A\,T_1 \,.\, A\,T_2$$

car $A^2 = \mathcal{J}$ et A est commutatif à toute T. On effectue alors le produit des OP $(\frac{\pi}{2})$: $A\,T_1$ et $A\,T_2$ en choisissant 2 anneaux de base de ces opérations sur 2 V. S. D. se coupant sous l'angle θ.

VIII - ETUDE DE $T \simeq (\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{a}})$ -

Soit : $T_1 \simeq (\mathcal{J}, \bar{\mathfrak{a}} \circ \bar{\mathfrak{a}})$, $T_2 \simeq (\bar{\mathfrak{a}} \circ \bar{\mathfrak{a}}, \mathcal{J})$

On a : $T = T_1\,T_2$

Soit $\mathcal{C}\mathcal{R}_1$ la congruence paratactique des anneaux de base de l'OP$(\frac{\pi}{2})$ induite par $(\mathcal{J}, \bar{\mathfrak{a}} \circ \bar{\mathfrak{a}})$.

$\mathcal{C}\mathcal{R}_2$ celle relative à l'OP $(\frac{\pi}{2})$ induite par$(\bar{\mathfrak{a}} \circ \bar{\mathfrak{a}}, \mathcal{J})$.

Désignons par A l'anneau commun à $\mathcal{C}\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{C}\mathcal{R}_2$.

Les 2 OP $(\frac{\pi}{2})$ étant d'espèces différentes, leur produit est une T. A. : (C) basée sur l'un des cercles C de A ou encore le produit $(\bar{C})(S) = (C)$.

THEOREME :

$(\bar{\mathfrak{a}}\ ,\ \bar{\mathfrak{a}})$ est l'image d'une transposition anallagmatique.

Remarque :

$(\bar{\mathfrak{a}}_1\bar{\mathfrak{a}}_2\ ,\ \bar{\mathfrak{a}}_1\ \bar{\mathfrak{a}}_2)$ est l'image sur Φ d'une R. A. basée sur un cercle de l'anneau commun aux 2 $\mathcal{C}\mathcal{R}$ d'espèces différentes, lieux des bases des OP induites par :

$$(\mathcal{J}, \bar{\mathfrak{a}}_1\,\bar{\mathfrak{a}}_2) \quad \text{et} \quad (\bar{\mathfrak{a}}_1\bar{\mathfrak{a}}_2, \mathcal{J})$$

IX - ETUDE DE $(P\ \bar{\mathfrak{a}}\ ,\ P\bar{\mathfrak{a}})$ -

Les paramètres des foyers du cercle de base de la R. A. précédente sont :

$$\lambda_o = \bar{\mu}_o \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon}{\bar{\lambda}_o} = \frac{\varepsilon}{\mu_o}$$

La permutation P de λ et μ induit une symétrie par rapport au plan du cercle. La T. A. est donc le produit de cette symétrie et d'une inversion dont la sphère directrice est $\perp$ à ce plan et à (S).

THEOREME :

(P. $\bar{\mathfrak{a}}$, P. $\bar{\mathfrak{a}}$) induit une inversion.

Généralisation

Les inversions conservant S peuvent toutes se déduire de l'une d'elles pas transmutation par une opération conforme conservant S.

D'où le symbolisme de l'image sur Φ d'une telle inversion :

$$(P.\mathcal{K}\,\bar{\mathfrak{a}}\,\mathcal{K}^{-1}\ ,\quad P\mathcal{K}'\,\bar{\mathfrak{a}}\,\mathcal{K}'^{-1})$$

$\mathcal{K}$ ou $\mathcal{K}'$ étant une opération conforme du groupe fondamental G de la géométrie cayleyenne d'absolu σ.

Posons :

$$\bar{\mathfrak{a}}_1 = \mathcal{K}.\ \bar{\mathfrak{a}}\ \mathcal{K}^{-1} \quad \text{et} \quad \bar{\mathfrak{a}}_2 = \mathcal{K}_1.\ \bar{\mathfrak{a}}\ \mathcal{K}_1^{-1}$$

On a :

$$\bar{\mathfrak{a}}_2 = \mathcal{K}'.\mathcal{K}^{-1}\,\bar{\mathfrak{a}}_1\,\mathcal{K}.\mathcal{K}'^{-1}$$

i.e. : $\bar{\mathfrak{a}}_2 = (\mathcal{K}'.\mathcal{K}^{-1}).\,\bar{\mathfrak{a}}_1\,(\mathcal{K}'.\mathcal{K}^{-1})^{-1}$

On observe que $\mathcal{K}'.\mathcal{K}^{-1} \in G$. Ainsi $\bar{\mathfrak{a}}_2$ est transmuée de $\bar{\mathfrak{a}}_1$ par une opération de G et réciproquement. On dira que $\bar{\mathfrak{a}}_1$ et $\bar{\mathfrak{a}}_2$ sont équivalentes modulo G et on écrira :

$$\bar{\mathfrak{a}}_2 \equiv \bar{\mathfrak{a}}_1$$

THEOREME :

L'image sur $\Phi = \pi \times \pi'$ d'une inversion conservant S est du type :

$(P\,\bar{\mathfrak{a}}_1,\ P\,\bar{\mathfrak{a}}_2)$ avec $\bar{\mathfrak{a}}_2$ et $\bar{\mathfrak{a}}_1$ permutables à σ.

Réciproque évidente.

CHAPITRE V

EXTENSION DU GROUPE CONFORME

I - ETUDE DE LA VARIETE DONT L'IDEAL PRINCIPAL RESULTE DE LA CONDITION DE COSPHERICITE DE 2 CERCLES -

Il faut et suffit que les axes réels des 2 cercles soient coplanaires. Une sphère orthogonale commune S est rencontrée en 2 points imaginaires conjugués par un tel axe et on supposera qu'on adopte pour paramétrer l'extension complexe de S les nombres λ, μ du chapitre IV.

1/ S est semi-réelle :

Les points d'intersection d'une droite réelle ont pour paramètres :

$$\lambda, \mu \quad \text{et} \quad -\bar{\lambda}^{-1} \quad , \quad -\bar{\mu}^{-1}$$

La condition de coplanarité s'écrit :

$$\begin{vmatrix} \lambda\mu & \lambda & \mu & 1 \\ 1 & -\bar{\mu} & -\bar{\lambda} & \bar{\lambda}\bar{\mu} \\ \lambda'\mu' & \lambda' & \mu' & 1 \\ 1 & -\bar{\mu}' & -\bar{\lambda}' & \bar{\lambda}'\bar{\mu}' \end{vmatrix} = 0$$

Identiquement vérifiée d'ailleurs si $\lambda = \lambda'$ et $\mu = \mu'$ ou $\lambda = -\bar{\lambda}'^{-1}$ et $\mu = -\bar{\mu}'^{-1}$ (cercles confondus).

2/ S est réelle :

L'axe d'un cercle réel orthogonal la coupe en 2 points imaginaires conjugués de paramètres :

$$\lambda, \mu \quad \text{et} \quad \bar{\mu}^{-1} \quad , \quad \bar{\lambda}^{-1}$$

La condition s'écrit :

$$\begin{vmatrix} \lambda\mu & \lambda & \mu & 1 \\ 1 & \bar{\lambda} & \bar{\mu} & \bar{\lambda}\bar{\mu} \\ \lambda'\mu' & \lambda' & \mu' & 1 \\ 1 & \bar{\lambda}' & \bar{\mu}' & \bar{\lambda}'\bar{\mu}' \end{vmatrix} = 0$$

Identiquement vérifiée si $\lambda = \lambda'$ et $\mu = \mu'$ (cercles confondus) ou $\lambda = +\bar{\mu}'^{-1}$ et $\mu = +\bar{\lambda}'^{-1}$ (cercles tangents).

Dans les 2 cas posons :

$$\lambda = x + iy \qquad \mu = z + it$$

$$\lambda' = x' + iy' \qquad \mu' = z' + it'$$

Le premier membre est un polynôme du 6è degré par rapport à : x, y, z, t, x', y', z', t' ; c'est l'idéal principal (sur le corps des réels) d'une variété V à 7 dimensions qu'on peut considérer :

- soit comme hypersurface d'un espace cartésien de point générique (x, y, z, t, x', y', z', t').

- soit comme extension complexe d'une variété qui est hypersurface d'un espace dont le point générique m à pour coordonnées cartésiennes (λ, μ, λ', μ'). Dans la suite on adoptera ce point de vue et, pour rappeler que son idéal est un polynôme identique à son conjugué, nous dirons que V est "hermitienne".

W désignera la sous-variété des points m de V correspondant à des cercles confondus ou tangents (i. e. cosphériques d'angle nul).

V' sera la pseudo-variété complémentaire de W sur V, i. e. définie par :

$$V = V' \cup W \qquad \text{et} \qquad V' \cap W = \emptyset$$

La relation : à 2 points $m_1 \in V$, $m_2 \in V$ correspond un même point $M^* \in E^* = E/(S)$ est une équivalence qui sera notée R_1 et qui détermine sur V des classes m* disjointes, points d'une variété quotient de V par R_1 telle que :

$$V/R_1 \simeq E^*$$

(symbolisme évoquant la correspondance biunivoque entre classes m* et points de E*).

De même, la relation : 2 points $n_1 \in V'$, $n_2 \in V'$ sont relatifs à 2 couples de cercles cosphériques se coupant sous le même angle non nul (se traduisant par : $\dot{\lambda}_1 \dot{\lambda}'_1 = \dot{\lambda}_2 \dot{\lambda}'_2$ et $\dot{\mu}_1 \dot{\mu}'_1 = \dot{\mu}_2 \dot{\mu}'_2$) est un raffinement de l'équivalence précédente, avec laquelle elle est compatible et se note R_2 :

R_2 induit une partition de toute classe m* en classes $n^x \cap m^*$. D'où la pseudo-variété :

$V'/R_1 R_2$ quotient de V' par $R_1 R_2$ équivalence produit

Soit G_s le sous-groupe conforme laissant S invariante. Il est trivial que :

G_s est transitif pour V/R_1 ; si G_s° est le sous-groupe de G_s conservant une classe $m_o^* \in V$, on a d'ailleurs :

$$V/R_1 \simeq G_s/G_s^\circ \quad \text{espace des classes modulo } G_s^\circ$$

Toutefois, si G_1 est transitif pour W, il ne l'est pas pour V' et les classes d'intransitivité ne sont autres que les points de la pseudo-variété $V'/R_1 R_2$ et $G_s \tilde{=} (V'/R_1 R_2 \cup W)$.

(proposition traduisant le fait banal que les transformations conformes conservent les angles).

On va donc, si possible, par adjonction à G_s d'un groupe g convenablement choisi, engendrer un groupe opérant transitivement sur les points de V' et non plus seulement sur ceux de $V'/R_1 R_2$ (il faut et suffit qu'il soit transitif pour V'/R_2).

Géométriquement, cela revient à déterminer un groupe de transformations t' de l'espace ponctuel E induit par un groupe de transformations T' de l'espace $\mathcal{C}$ des cercles invariants par (S) possédant la propriété de transformer un couple cosphérique en un couple cosphérique d'angle différent.

II - DETERMINATION D'UN GROUPE OPERANT TRANSITIVEMENT DANS V'/R_2 -

Dans une transformation T' d'un tel groupe, un point m $(\lambda, \mu, \lambda', \mu') \in V'$ doit être transformé en un autre point $m_1(\lambda_1, \mu_1, \lambda'_1, \mu'_1) \in V'$ tel que :

$$\dot{\lambda}_1 \dot{\lambda}'_1 \neq \dot{\lambda} \dot{\lambda}'$$

Il conviendra donc de faire appel à des transformations T' dont les images dans Φ_o ne conservent plus l'absolu σ tout en prolongeant naturellement les résultats du chapitre précédent.

$\bar{\mathcal{A}}$ désignant maintenant une antiinvolution ne conservant pas l'absolu, on se propose de prouver que :

$(\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}})$ est l'image d'une transformation t' du type cherché.

Les cercles directeurs (confondus) des inversions engendrées par $\bar{\mathcal{A}}$ dans π et π' ont leurs quasi-centres confondus :

$$\dot{\lambda}_o = \dot{\mu}_o$$
$$(\varepsilon \dot{\lambda}_o^{-1}) = (\varepsilon \dot{\mu}_o^{-1})$$

Mais l'étude de la représentation sphérique d'une quasi-inversion dans $\mathcal{C}\mathcal{R}$ montre que $(\bar{\mathcal{A}}, \mathcal{I})$ induit dans toute $\mathcal{C}\mathcal{R}$ dont les isotropes de base appartiennent au système μ une quasi-inversion ; les images du quasi-pôle sur $\Phi = \pi \times \pi'$ sont les points $\dot{\lambda}_o$, $\dot{\mu}_o$ et celles du conjugué $\bar{I}$ les homologues dans (σ) des points précédents et la quasi-puissance est celle de l'inversion $\bar{\mathcal{A}}$ dans sa définition généralisée.

Même raisonnement pour $(\mathcal{I}, \bar{\mathcal{A}})$ en permutant λ et μ.

Conclusion

Etant donné 2 congruences paratactiques $\mathcal{C}\mathcal{R}$ et $\mathcal{C}\mathcal{R}'$ de systèmes différents, $(\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{A}})$ est l'image d'un couple de quasi-inversions simultanées de même quasi-puissance K.

l'une définie pour les cercles de $\mathcal{C}\mathcal{R}$,

l'autre définie pour les cercles de $\mathcal{C}\mathcal{R}'$,

ayant toutes deux même cercle quasi-pôle $I \in \mathcal{C}\mathcal{R} \cap \mathcal{C}\mathcal{R}'$, le conjugué $\bar{I}$ étant le "quasi-infini".

L'homologue par t' d'un point m $(\lambda, \mu_o, \mu_o, \lambda') \in V$ (i.e. tel que : $\dot{\mu}_o \dot{\lambda} = \dot{\mu}_o \dot{\mu}'$ au sens des quasi-distances) est un point n $(\lambda_1, \mu_o, \mu_o, \mu'_1)$ tel que :

$$\dot{\mu}_o \dot{\lambda}_1 = K. \dot{\mu}_o \dot{\lambda}$$

et $$\dot{\mu}_o \dot{\mu}'_1 = K. \dot{\mu}_o \dot{\mu}'$$

donc tel que : $$\dot{\mu}_o \dot{\lambda}_1 = \dot{\mu}_o \dot{\mu}'_1$$

Par suite on a : $n \in V$

Géométriquement, un point $m \in V$ est commun à un couple de cercles cosphériques d'une cyclide de Dupin d'anaxes I, $\bar{I}$. Quant au point n, commun au couple transformé, il appartient à une cyclide coanaxiale.

(on rappelle que m et n sont des points de E^*).

Entre les quasi-rayons des 2 cyclides, on a la relation :

$$\cotg r.\ \cotg r_1 = K \quad \text{quasi-puissance commune des 2 quasi-inversions considérées.}$$

Mais r et r_1 sont les demi-angles superficiels des 2 cyclides :

$$r = v/2 \ , \qquad r_1 = v_1/2$$

d'où :

$$\cotg\ v/2.\ \cotg\ v_1/2 = K$$

ce qui prouve qu'en choisissant convenablement K, il est possible de transformer tout couple d'angle v en un couple d'angle v_1 donné.

Nous désignerons désormais la transformation obtenue sous le nom de quasi-inversion QI, celle définie antérieurement n'étant que la trace de la QI dans une $\mathcal{C}\mathcal{P}$ considérée comme élément de $\mathcal{E}$.

Les ∞^1 transformations $\bar{\mathcal{A}} \times \bar{\mathcal{A}}$, telles que les cercles directeurs des inversions engendrées par $\bar{\mathcal{A}}$ appartiennent à un faisceau contenant σ et admettant mêmes quasi-centres (les points limites) constituent un ensemble d'opérateurs e transformant un m^x donné en n^x quelconque. L'ensemble e^{-1} se définit de manière évidente.

Si n_1^x et n_2^x sont 2 points de V/R_2, désignons par α_1 et α_2 les opérateurs tels que :

$$\alpha_1\ m^x = n_1^x$$

$$\alpha_2\ m^x = n_2^x$$

Il vient : $m^x = \alpha_1^{-1}\ n_1^x$ et $n_2^x = \alpha_2\ \alpha_1^{-1}\ n_1^x$

Ainsi $e \cup e^{-1}$ engendre un groupe g qui opère transitivement dans V'/R_2 et qui est tel que :

$$V/R_2 \simeq g$$

Le produit de 2 telles quasi-inversions, dont les représentations sont $(\bar{\mathcal{A}}_1, \bar{\mathcal{A}}_1)$ et $(\bar{\mathcal{A}}_2, \bar{\mathcal{A}}_2)$ est une transformation représentée par $[(\bar{\mathcal{A}}_1.\bar{\mathcal{A}}_2), (\bar{\mathcal{A}}_1.\bar{\mathcal{A}}_2)]$. Comme chaque transformation $[(\bar{\mathcal{A}}_1.\bar{\mathcal{A}}_2), \mathcal{I}]$ et $[\mathcal{I}, (\bar{\mathcal{A}}_1.\bar{\mathcal{A}}_2)]$ induit une quasi-homothétie dans chacune des 2 $\mathcal{C}\mathcal{P}$ de base des QI, nous la désignerons désormais sous le nom de quasi-homothétie QH, de centre I et de rapport le produit des quasi-puissances.

Le produit d'un nombre impair (resp. pair) de quasi-inversions de même quasi-pôle est une QI (resp. une QH) de même quasi-pôle (resp. quasi-centre) et de quasi-puissance (resp. rapport) convenable.

III - ETUDE GEOMETRIQUE DE LA Q.I.

Un raisonnement direct utilisant les propriétés d'une QI restreinte à une $\mathcal{C}\mathcal{P}$ ou la considération des images dans Φ_0 donne immédiatement les résultats suivants :

L'homologue par Q.I. d'une cyclide de Dupin d'anaxes I et $\bar{I}$ est une cyclide coanaxiale, confondue avec la première qui prend alors le nom de cyclide directrice si le quasi-rayon est $\sqrt{K}$. L'image d'une telle cyclide est c, cercle directeur de l'inversion engendrée par $\bar{\mathcal{A}}$.

Toute V.S.D. contenant I et $\bar{I}$ et appartenant par conséquent à une des 2 $\mathcal{C}\mathcal{P}$ contenant I et $\bar{I}$ est invariante quel que soit K ; 2 telles V.S.D. non congruentes ont en commun, outre I et $\bar{I}$, 2 cercles C' et $\bar{C}'$ séparément invariants.

Comme, réciproquement, C' définit avec I et $\bar{I}$ 2 telles V.S.D., on voit qu'en définitive, la QI conserve chaque cercle de la congruence des cercles communs à I et $\bar{I}$ (rapprocher de : l'inversion conserve chaque droite issue du pôle et s'appuyant sur le plan de l'infini se déduisant du pôle comme $\bar{I}$ de I).

Soit O* un point $I \cap C' \in E^*$: à tout $M^* \begin{cases} \in E^* \\ \in I \text{ ou } \bar{I} \end{cases}$ on fait correspondre M'* situé sur le cercle unique $C' \ni M^*$, $\perp$ commun à I et $\bar{I}$, tel que u et u' désignant les distances paratactiques de M* et M'* à O* (relativement à S), on ait :

$$\operatorname{cotg} u . \operatorname{cotg} u' = K$$

Si K = - 1, la QI est une association qui peut donc être considérée, soit comme transformation conforme, soit comme quasi-inversion.

De même, une Q.H. de rapport - 1 est une transposition anallagmatique.

Remarques.

1/ $\bar{I}$ est l'homologue de tout point de I, I de tout point de $\bar{I}$.

2/ La QI conserve les angles des éléments plans contenant l'une ou l'autre des tangentes aux 2 cercles de $\mathcal{C}\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}\mathcal{T}'$ contenant un point $M^* \in S$. (conséquence de la page 37, ch. II).

IV - CLASSES DE QI -

Une QI définie par la sphère fondamentale S, le cercle quasi-pôle (C $\perp$ S) et la quasi-puissance K sera désignée par le symbole (C, S, K).

La notion est anallagmatique, d'après la définition même : une QI est transmuée par une opération conforme en une QI de même quasi-puissance.

Réciproquement, soient 2 QI de même quasi-puissance :

$$(C, S, K) \quad \text{et} \quad (C', S, K')$$

L'une peut être transmuée en l'autre par une opération conforme. En effet, (C, S, K) peut être transmuée en une (C'', S', K) par une inversion permutant S et S', puis (C'', S', K) en (C', S', K) par une T.A. conservant S' et permutant C'' et C'.

Ainsi, toutes les QI de même quasi-puissance K s'obtiennent en transmuant l'une d'entre elles par une opération conforme et seront dites appartenir à la classe (K).

Toute QI est donc anallagmatiquement équivalente à une QI dont la cyclide directrice appartient à une famille coanaxiale donnée et qui sera dite un représentant de la classe (K).

Même raisonnement pour les QH.

Nous désignerons ultérieurement par des lettres romaines les opérations du groupe conforme G et par des lettres grecques celles du groupe g des QI et QH de même quasi-pôle ou quasi-centre donné (tous les groupes g sont évidemment équivalents anallagmatiquement).

V - THEOREME D'EXTENSION DU GROUPE G -

L'adjonction à G des opérations de g engendre un groupe QC dit quasi-conforme.

En effet, tout produit d'éléments de G et E est un monôme à lettres grecques et romaines et le produit de 2 tels monômes est encore un monôme

de même espèce. L'inverse d'un monôme se définit de manière évidente.

Tout produit de lettres grecques (resp. romaines) consécutives peut se remplacer par une seule lettre grecque (resp. romaine). Après une telle réduction, tout élément de QC peut s'écrire sous la forme :

$$\prod_1 \quad a_i \quad \xi_i$$

le premier ou le dernier facteur pouvant d'ailleurs être nul.

Un a n'est d'ailleurs permutable avec un ξ que dans le cas où a laisse invariant chaque cercle de l'anneau fondamental du groupe g, formé par le quasi-pôle ou quasi-centre commun et son conjugué.

THEOREME -

L'adjonction du groupe g au groupe conforme G engendre un groupe dit quasi-conforme QC et le sous-groupe QC' obtenu en remplaçant G par le sous-groupe G' des transformations conformes conservant les cercles de l'anneau fondamental de g est produit commutatif de G' et g :
$QC' = G'.g = g.G'$.

Equations paramétriques des transformations de QC en coordonnées pentasphériques.

D'après l'étude précédente, les transformations de QC sont, à des transformations conformes près, celles d'un groupe conservant une même sphère fondamentale S (rayon R = 1 ou i). Les coordonnées pentasphériques homogènes de S sont :

$$\frac{C_1}{1+R^2} = \frac{C_2}{-i(1-R^2)} = \frac{C_3}{0} = \frac{C_4}{0} = \frac{C_5}{0} = \frac{C_6}{-2iR}$$

Pour qu'un point de coordonnées pentasphériques $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ 0$ appartienne à S, il faut et suffit que :

$$\sum_1^5 C_i\, x_i = 0 \quad \text{ou} \quad (1+R^2)\,x_1 - i(1-R^2)\,x_2 = 0$$

Si λ et μ désignent les paramètres des isotropes de S de systèmes différents, on peut prendre pour coordonnées pentasphériques d'un point f de S :

$$\frac{x_1}{i(1-R^2)} = \frac{x_2}{1+R^2} = \frac{x_3}{\frac{-R(\lambda\mu+1)}{\lambda-\mu}} = \frac{x_4}{\frac{R(1-\lambda\mu)}{i(\lambda-\mu)}} = \frac{x_5}{\frac{-R(\lambda+\mu)}{i(\lambda-\mu)}} = \frac{x_6}{0}$$

Soit, si f est imaginaire, $\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3\ \bar{x}_4\ \bar{x}_5\ 0$ les coordonnées de $\bar{f}$ son conjugué.

Pour que $X_1\ X_2\ X_3\ X_4\ X_5\ 0$ soient coordonnées pentasphériques d'un point du cercle réel C de foyers f et $\bar{f}$, il faut et suffit, qu'outre la relation :

$\Sigma\, X_i^2 = 0$, ces nombres vérifient :

$$\sum_1^5 X_i\, x_i = 0 \qquad (1) \qquad\qquad \sum_1^5 X\ \bar{x} = 0 \qquad (2)$$

Soient f' et $\bar{f}'$ les foyers d'un autre cercle $C' \perp$ à S. Pour que C et C' soient cosphériques, il faut et suffit que les 4 points f, $\bar{f}$, f', $\bar{f}'$ soient coplanaires, c'est-à-dire que le point m $(\lambda, \mu, \lambda', \mu')$ appartienne à la variété V du chapitre actuel.

Si cette condition est remplie, le système des X_i solutions du système formé par les équations (1) (2) et par :

$$\sum_1^5 X_i\, x'_i = 0 \qquad (3) \qquad\qquad \sum_1^5 X_i\, \bar{x}'_i = 0 \qquad (4)$$

représente les coordonnées pentasphériques homogènes non nulles du point de $E^* = E/(S)$ défini par $C \cap C'$.

Si $d_{ijkl}(\lambda, \mu, \lambda', \mu', \frac{\varepsilon}{\lambda}, \frac{\varepsilon}{\mu}, \frac{\varepsilon}{\lambda'}, \frac{\varepsilon}{\mu'})$ représente le déterminant des coefficients des inconnues X d'indices i, j, k, l, en fonction des lettres grecques, il vient dans peine :

$$\frac{X_1}{d_{2345}} = \frac{X_2}{d_{3451}} = \frac{X_3}{d_{4512}} = \frac{X_4}{d_{5123}} = \frac{X_5}{d_{1234}} = \frac{X_6}{0} \qquad (m \in V) \qquad (5)$$

VI - QUASI-INVERSION -

On a : $m(\lambda, \mu_o, \mu_o, \mu') \in V$; quand λ et μ' varient, le lieu de m est une sous-variété v de V et les formules (5) établissent une correspondance birationnelle entre E^* et v.

Une Q. I. dont le quasi-pôle a pour image $(\dot{\mu}_o, \dot{\mu}_o)$ sur Φ_o s'obtient alors en effectuant dans (5) la substitution :

$$\lambda_1 = \bar{\mathcal{A}}(\lambda) \qquad \mu'_1 = \bar{\mathcal{A}}(\mu')$$

avec : $\bar{\mathcal{A}} \,.\, (\sigma) \neq (\sigma) \,.\, \bar{\mathcal{A}}$

les points doubles de $\bar{\mathcal{A}}$ ayant pour lieu un cercle déterminant avec σ un faisceau de points limites μ_o , $\varepsilon\, \bar{\mu}_o^{-1}$, à P près.

VII - QUASI-HOMOTHETIE -

Remplacer dans ce qui précède $\bar{\mathcal{A}}$ par $\mathcal{H}$ homographie hyperbolique, produit de 2 antiinvolutions $\bar{\mathcal{A}}$, $\bar{\mathcal{A}}'$, à points doubles homologues dans (σ).

VII - SOUS-GROUPE DE Q. C. CONSERVANT S -

L'image sur Φ_o de toute opération conforme conservant S est du type : $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ ou $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des transformations circulaires commutatives à (σ).

La définition d'une Q. I. ou d'une Q. H. étant anallagmatique, toute Q. I. (resp. toute Q. H.) a une image sur Φ_o du type :

$$(\mathcal{C}\, \bar{\mathcal{A}}\, \mathcal{C}^{-1} \,,\, \mathcal{C}'\, \bar{\mathcal{A}}\, \mathcal{C}'^{-1}) \qquad \text{avec } \bar{\mathcal{A}} \,.\, (\sigma) \neq (\sigma) \,.\, \bar{\mathcal{A}}$$

(resp. : $(\mathcal{C} \,.\, \mathcal{H} \,.\, \mathcal{C}^{-1}$, $\mathcal{C}' \,.\, \mathcal{H} \,.\, \mathcal{C}'^{-1})$)

Plus généralement, l'image sur Φ_o de toute transformation de Q. C. conservant S est du type :

$$(\mathcal{C}_1 \,.\, \bar{\mathcal{A}}\, \mathcal{C}_2 \quad , \quad \mathcal{C}'\, \bar{\mathcal{A}}\, \mathcal{C}'_2)$$

$$(\mathcal{C}_1 \,.\, \bar{\mathcal{A}} \,.\, \bar{\mathcal{A}}' \,.\, \mathcal{C}_2 \quad , \quad \mathcal{C}'_1\, \bar{\mathcal{A}}\, \bar{\mathcal{A}}' \,.\, \mathcal{C}'_2)$$

$\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}'_1$, $\mathcal{C}'_2$ étant circulaires, commutatives à (σ) et les chaînes de $\bar{\mathcal{A}}$, $\bar{\mathcal{A}}'$ déterminant avec σ un même faisceau.

Remarques

1/ Sur π et π', les transformations de Q. C. conservant S induisent des similitudes cayleyennes.

2/ Sur Φ_o une transformation quelconque de Q. C. conservant S a pour image :

$$\bar{\mathcal{A}}_i \,.\, \theta \,, \quad \bar{\mathcal{A}}'_i \,.\, \theta' \qquad \text{avec } \bar{\mathcal{A}}_i \equiv \bar{\mathcal{A}}'_i \pmod{G_s}$$

ou

$$\mathcal{H}_i \,.\, \theta \,, \quad \mathcal{H}'_i \,.\, \theta' \qquad \text{avec } \mathcal{H}_i \equiv \mathcal{H}'_i \pmod{G_s}$$

θ , θ' étant l'image d'une transformation de G_s.

En appliquant aux paramètres λ et μ' des formules (5) les couples de transformations précédentes, on fait correspondre à tout point M^* de E^* un point M'^* de E'^*.

CHAPITRE VI

APPLICATIONS DU GROUPE QUASI-CONFORME

I - TRANSFORMATION D'UN COUPLE DE CERCLES PARATACTIQUES EN UN AUTRE -

Soient 2 congruences paratactiques, respectivement $\mathcal{CR}_1$ de sphère fondamentale S_1 et $\mathcal{CR}_2$ de sphère S_2. Soient :

γ_1 et γ_1' 2 cercles de $\mathcal{CR}_1$ de V-angle V_1

γ_2 et γ_2' " " $\mathcal{CR}_2$ " " V_2

Il existe ∞^1 opérations conformes transformant un anneau à cycles relativement orientés de $\mathcal{CR}_1$ en un anneau analogue de $\mathcal{CR}_2$, donc ∞^3 opérations conformes transformant $\mathcal{CR}_1$ en $\mathcal{CR}_2$. Dans une telle opération, γ_1 et γ_1' ont pour homologues respectivement δ_1 et δ_1' cercles de $\mathcal{CR}_2$.

On voit facilement, en utilisant l'indétermination du choix, que, sans restreindre le problème, on peut supposer que les V. S. D. déterminées respectivement par δ_1, γ_2 et δ_1', γ_2' ont en commun un anneau I dont l'un des cercles est la base d'une Q. I. échangeant δ_1 et γ_2, δ_1' et γ_2'.

On a ainsi réalisé, par voie géométrique, la synthèse des opérations de Q. C. qui transforment le couple γ_1, γ_1' en γ_2, γ_2'. Il est à remarquer que le groupe conforme ne fournit les solutions que dans le cas particulier où $V_1 = V_2$.

Supposant alors γ_1 et V_1 fixes, ainsi que γ_2 et V_2, on voit que la construction précédente détermine les opérations du groupe Q. C. transformant la cyclide de Dupin de sphère fondamentale S_1 admettant γ_1 pour anaxes et V_1 pour quasi-rayon en la cyclide de Dupin d'éléments analogues S_2, γ_2, V_2.

Remarque

On peut ainsi établir la théorie en utilisant les images dans π et π' si $S_1 = S_2 = S$.

II - ECHANGE DE 2 COUPLES DE CERCLES COSPHERIQUES (NON TANGENTS) -

Soient γ_1, γ_1' et γ_2, γ_2', 2 tels couples déterminant des angles $2V_1$ et

$2V_2$: il existe ∞^1 cyclides de Dupin contenant le couple γ_1, γ'_1 (resp. γ_2, γ'_2) ; leurs sphères fondamentales forment un faisceau à points limites $\gamma_1 \cap \gamma'_1$ (resp. $\gamma_2 \cap \gamma'_2$) et les anaxes d'une cyclide relative à l'une de ces sphères se déterminent par le lemme fondamental : l'un des angles rayons est V_1 (resp. V_2).

D'après le paragraphe précédent, on sait transformer une cyclide contenant γ_1, γ'_1, en une cyclide contenant γ_2, γ'_2 par une transformation $T \in QC$; il existe alors une R.A. U relative aux anaxes de cette dernière cyclide, telle que TU transforme γ_1, γ'_1 en γ_2, γ'_2.

III - EXTENSION DU GROUPE HOMOGRAPHIQUE -

En remplaçant chaque cercle de $\mathscr{C}$ (espèce des cercles invariants par (S)) par son axe et remarquant que la cosphéricité de 2 cercles de $\mathscr{C}$ équivaut à l'incidence de leurs axes, on peut définir à partir de la QI une transformation ponctuelle permettant d'étendre le groupe des transformations homographiques conservant S, en sorte que 4 points coplanaires de S ont pour homologues 4 points coplanaires de rapport anharmonique différent.

Soient C_1 et C_2 2 congruences de droites incidentes respectivement aux couples d'isotropes δ_1, $\bar{\delta}_1$ et δ_2, $\bar{\delta}_2$ de 2 congruences paratactiques d'espèces différentes et de même sphère principale S. Notons Δ, $\bar{\Delta}$ les droites communes à C_1 et C_2, d'ailleurs conjuguées par rapport à S.

Tout point $M \notin S$ de l'espace ponctuel est commun à 2 droites d_1 et d_2 : l'une appartenant à C_1, l'autre à C_2.

Soient d'_1, d'_2 un autre couple définissant le point M' et posons :

$$e^{2iV} = (\delta_2, \bar{\delta}_2, d_1, d'_1)$$

$$e^{2iV'} = (\delta_1, \bar{\delta}_1, d_2, d'_2)$$

Si on impose la relation : $\underline{\text{cotg V. cotg V'}} = K$ (constante) M' est l'homologue de M dans la transformation ponctuelle qu'on se proposait de définir.

De plus, chaque droite de la congruence singulière de supports Δ, $\bar{\Delta}$ demeure invariable dans cette transformation.

IV - IMAGES OPERATIONNELLES DES POINTS DE V' -

On se propose de faire correspondre à tout point de V' un couple unique d'opérations circulaires de Φ_o, image d'une transformation de Q.C., et réciproquement.

Soit donc :

$$m_o(\lambda_o, \lambda'_o, \mu_o, \mu'_o) \in V' \qquad \text{(fixe)}$$

$$m_1(\lambda_1, \lambda'_1, \mu_1, \mu'_1) \in V' \qquad \text{(variable)}$$

Au chapitre précédent, on a établi entre les paramètres de m_o et m_1 des relations de la forme nécessaire et suffisante :

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1 = \mathscr{C}.\ \theta\ (\lambda_o) & \lambda'_1 = \mathscr{C}.\ \theta\ (\lambda'_o) \\ \mu_1 = \mathscr{C}'.\ \theta'(\mu_o) & \mu'_1 = \mathscr{C}'.\ \theta'(\mu'_o) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

avec $\mathscr{C} = \bar{\mathscr{A}}$ ou $\mathscr{K}$ et $\mathscr{C} \equiv \mathscr{C}'$ (mod. G)

$$\bar{\mathscr{A}}.\ (\sigma) \neq (\sigma).\bar{\mathscr{A}}\ ,\quad \mathscr{K}\ (\sigma) \neq (\sigma).\mathscr{K}\ ,\quad \theta \text{ et } \theta' \in G$$

donc $\mathscr{C}'$ est du type : $\mathscr{C}' = \mathscr{D}\mathscr{C}\mathscr{D}^{-1}$, $\mathscr{D} \in G$

Posons :

$$\mathscr{K} = \theta^{-1}\ \mathscr{D}^{-1}\ \theta'$$

Il vient :

$$\mathcal{C}'\ \theta' = \mathcal{D}\ \mathcal{C}\ \mathcal{D}^{-1}\ \theta'$$

$$= \mathcal{D}\ \mathcal{C}\ \theta\ \mathcal{K}$$

Supposons que désormais μ_o soit le nouveau nom de $\mathcal{K}(\mu_o)$ i.e. représente en réalité le paramètre du transformé de μ_o dans le déplacement cayleyen $\mathcal{K}(\mu)$ de π'.

Avec cette convention, les formules (1) s'écrivent :

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1 = \mathcal{C}.\ \theta\ (\lambda_o) & \lambda'_1 = \mathcal{C}.\ \theta\ (\lambda'_o) \\ \mu_1 = \mathcal{D}.\ \mathcal{C}.\ \theta\ (\mu_o) & \mu'_1 = \mathcal{D}.\ \mathcal{C}.\ \theta\ (\mu'_o) \end{array}\right\} \qquad (2)$$

m_o et m_1 étant donnés, on se propose de faire correspondre à tout couple ordonné (m_o, m_1) un couple unique $\mathcal{C}\ \theta$, $\mathcal{D}$ ce qui résoudra le problème posé au début du paragraphe.

$\mathcal{C} = \mathcal{C}\ \theta$ dépend de 6 paramètres (comme le groupe circulaire du plan) car $\mathcal{C}$ induite par une Q.I. ou une Q.H. dépend de 3 paramètres réels (les 2 composantes réelles du paramètre complexe fixant le quasi-centre ou quasi-pôle et un réel : la quasi-puissance ou le quasi-rapport) et :

θ déplacement cayleyen est du type :

$$z' = \frac{a'z + b'}{z - \varepsilon\ \bar{a}'b'} \qquad \text{avec } \bar{b}'b' = 1$$

$\varepsilon = -1$ si $R = 1$

$\varepsilon = +1$ si $R = i$

(il dépend donc de 3 paramètres réels)

Soit alors $\mathcal{C}$ une fonction circulaire quelconque dont les paramètres sont α , β pour le numérateur } 4 nombres déterminés à
γ , δ pour le dénominateur } 1 facteur complexe près
(d'où 6 paramètres réels)

Le système : $\mathcal{C}(\lambda_o) = \lambda_1 \qquad \mathcal{C}(\lambda'_o) = \lambda'_1 \qquad (3)$

est linéaire par rapport à α et β ; il admet une solution unique (car $\lambda_o \neq \lambda'_o$, $\lambda_1 \neq \lambda'_1$) linéaire et homogène par rapport à γ et δ, rationnelle relativement à $\lambda_o, \lambda_1, \lambda'_o, \lambda'_1$.

$\mathcal{C}$ est donc déterminée au paramètre $\frac{\delta}{\gamma}$ près.

Mais $\mathcal{D}$ est tel que :

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{D}^{-1}\ (\mu_1) = \mu_2 = \mathcal{C}\ (\mu_o) \\ \mathcal{D}^{-1}\ (\mu'_1) = \mu'_2 = \mathcal{C}\ (\mu'_o) \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Explicitons $\mathcal{D}^{-1}$ sous la forme $\mathcal{D}^{-1}(z) = \frac{az + b}{z - \varepsilon\ \bar{a}b}$ avec $b\bar{b} = 1$ et déterminons a', b' à l'aide de (4). Il vient :

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon\ \bar{a}\ b\ \mu_2 + a\ \mu_1 + b - \mu_1\ \mu_2 = 0 \\ \varepsilon\ \bar{a}\ b\ \mu'_2 + a\ \mu'_1 + b - \mu'_1\ \mu'_2 = 0 \\ b\ \bar{b} = 1 \end{array}\right\} \qquad (4')$$

Multiplions les 2 premières équations (4') par $\bar{b}$; il vient, compte tenu de : $b\ \bar{b} = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon\ \bar{a}\ \mu_2 + a\ \bar{b}\ \mu_1 + 1 - \bar{b}\ \mu_1\ \mu_2 = 0 \\ \varepsilon\ \bar{a}\ \mu'_2 + a\ \bar{b}\ \mu'_1 + 1 - \bar{b}\ \mu'_1\ \mu'_2 = 0 \end{array}\right\} \qquad (4'')$$

Des équations (4'), on déduit :

$$a\,(\mu_1\,\mu'_2 - \mu'_1\,\mu_2) + b\,(\mu'_2 - \mu_2) + \mu_2\mu'_2\,(\mu'_1 - \mu_1) = 0 \qquad (5)$$

et de (4'') :

$$\varepsilon\,\bar{a}\,(\mu_2\,\mu'_1 - \mu'_2\,\mu_1) + \bar{b}\,(\mu_1\,\mu'_1\,\mu'_2 - \mu'_1\,\mu_1\,\mu_2) + \mu'_1 - \mu_1 = 0 \qquad (6)$$

Finalement, a et b sont solutions du système :

$$\varepsilon\,a\,(\bar{\mu}_2\,\bar{\mu}'_1 - \bar{\mu}'_2\,\bar{\mu}_1) + b\,\bar{\mu}_1\,\bar{\mu}'_1\,(\bar{\mu}'_2 - \bar{\mu}_2) + \bar{\mu}'_1 - \bar{\mu}_1 = 0 \qquad (6')$$

$$a\,(\mu_1\mu'_2 - \mu'_1\,\mu_2) + b\,(\mu'_2 - \mu_2) + \mu_2\,\mu'_2\,(\mu'_1 - \mu_1) = 0 \qquad (5')$$

On montre que le déterminant Δ des coefficients de a et b n'est pas identiquement nul et qu'il est alors possible de choisir le paramètre $\frac{\delta}{\gamma}$ pour que Δ soit $\neq 0$.

Alors a, b et par suite $\bar{a}$ b s'expriment rationnellement en fonction de $\mu_o, \mu_1, \mu'_o, \mu'_1, \gamma, \delta$ et de leurs conjugués.

Non seulement on a construit des fonctions uniques $\mathcal{C} = \mathcal{C}\,\theta, \omega$, mais on a trouvé que tout point $m \in V'$ a des coordonnées qui s'expriment rationnellement en fonction de celles de m_o, si et seulement s'il en est ainsi des coefficients de $\mathcal{C}$ et ω.

V - REPRESENTATIONS BIRATIONNELLES DE V' -

De l'analyse précédente résulte qu'on sait trouver une représentation paramétrique rationnelle de V' dès que l'on connaît un point rationnel m_o de cette pseudo-variété.

u étant un nombre rationnel, on vérifie que le point de coordonnées :

$x = u \quad y = 1 \quad z = i \quad t = u$ est sur S (réelle)

$x = u \quad y = 1 \quad z = i \quad t = iu$ est sur S (semi-réelle)

Il en est ainsi des symétriques du point par rapport au plan z = 0 ou au bissecteur du dièdre (x, Oz, y).

Ces 4 points déterminent 2 droites réelles concourantes au point :

$$z = 0 \qquad x = y = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{u}\right)$$

axes de 2 cercles cosphériques. L'image sur V' d'un tel couple est un point m_o de coordonnées rationnelles.

Rendons réels les dénominateurs des fonctions $\mathcal{C}$ et $\omega\,\mathcal{C}$ puis identifions parties réelles et imaginaires pures dans les formules (2) :

Les coordonnées x y z t x' y' z' t' d'un point $m \in V'$ sont fonctions rationnelles du 6è degré des composantes rationnelles réelles des paramètres complexes de $\mathcal{C}$ et $\omega\,\mathcal{C}$.

En résumé, on a montré que V' était birationnellement équivalente à un de ses points et contenait des points rationnels. V' admet donc ∞^7 telles représentations birationnelles.

BIBLIOGRAPHIE

D. F. BARROW - Transactions of the american Math. Soc. t. XVI.

G. BOULIGAND - Premières leçons sur la théorie générale des groupes (Vuibert).

A. BLOCH - Journal de Math. 9è série t. III - 1924 - C.R.A.S. 1923 n° 17-19.

E. CARTAN - Leçons de géométrie projective complexe.

G. DARBOUX - Théorie des surfaces t. 3 p. 492-500 - Principes de géométrie analytique.

DEMOULIN - C. R. A. S. 8 Août 1922 - Bull. Ac. Roy. Belgique 5 Août 1922.

R. DONTOT - Etude élémentaire de la parataxie et des cyclides.

B. GAMBIER - Journal de Math. 9è série - t. IX - 1930 - p. 179-199 - t. XI - 1932 - p. 377-384. - t. XIX - 1940 - p. 237-260 - An. Ecole norm. 1946 (important) Mémorial des Sciences Mathématiques (Cycles paratactiques CIV).

R. GARNIER - Géométrie et cinématique cayleyenne (Tome III - Cours de Cinématique)

GOURSAT - An. Ecole norm. - 3è série - t. VI.

HADAMARD - Nouvelles annales de Math. - t. II - 1927 p. 257-270, 289-329. Géométrie de l'Espace - 7è édition.

G. KOENIGS - An. Faculté Sc. Toulouse - t. II

LABROUSSE - Journal de Math. - 9è série - t. X - 1931 - p. 307-334.

LAGRANGE - Ann. Ecole normale - 1942 et 1945.

H. LEBESGUE - Les coniques - Gauthier Villars - 1942 - p. 41-90.

R. PERNET - C. R. A. S. 1ère note : 19 Novembre 1945. Un principe de traduction de propriétés géométriques de la droite et du cercle, en propriété des séries de Villarceau d'une congruence paratactique.
2ème note : 19 Novembre 1951. Un caractère topologique du groupe conforme.
3ème note : 19 Novembre 1951. Une extension du groupe conforme.

P. ROBERT - Journal de Math.- 1930

K. STRUBECKER - Uber die parataktische Abbildung des isotropen Raumes... Journal de Crelle, tome 186 (1945) p. 129.

VESSIOT - C. R. A. S. - Avril 1920 - Journal de Math. 69è série t. II - 1929 - Journal de Math. pures et appliquées 1923.

E. VON WEBER - Archiv. der Math. und Phys. - t. VII - 3è série 1904.

Besançon, le 7 Février 1959

Le Doyen,
Signé :
R. JACQUEMAIN

VU et permis d'imprimer

Besançon, le 12 Février 1959

Cachet du Rectorat

Le Recteur,
Signé :
F. PONTEIL

IMP. LOUIS-JEAN – GAP
Dépôt légal n° 102 – 1959